



**Localisation de défauts et applications pour les milieux inhomogènes en propagation d'ondes acoustiques**  
**Defects localization and applications to inhomogeneous media in acoustic scattering**

Yann Grisel

► **To cite this version:**

Yann Grisel. Localisation de défauts et applications pour les milieux inhomogènes en propagation d'ondes acoustiques. Defects localization and applications to inhomogeneous media in acoustic scattering. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2011. Français. NNT: . tel-00675217

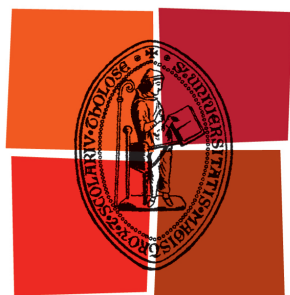
**HAL Id: tel-00675217**

**<https://theses.hal.science/tel-00675217>**

Submitted on 29 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

## En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

**Délivré par :**

Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

**Discipline ou spécialité :**

Mathématiques appliquées

---

**Présentée et soutenue par**

Yann Grisel

**le :** 7 décembre 2011

**Titre :**

Localisation de défauts et applications pour les milieux inhomogènes en  
propagation d'ondes acoustiques

---

**École doctorale :**

Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

**Unité de recherche :**

ONERA Toulouse, DTIM, équipe M2SN

**Directeurs de thèse :**

Vincent Mouysset

Jean-Pierre Raymond

**Rapporteurs :**

Marc Bonnet

Houssein Haddar

**Membres du jury :**

Hélène Barucq

Abderrahmane Bendali

Karim Ramdani



---

# Remerciements

---

Plusieurs personnes ont une responsabilité non négligeable<sup>1</sup> dans le fait que non seulement je me retrouve à faire des Mathématiques mais qu'en plus, les Mathématiques sont aujourd'hui pour moi bien plus que la somme de ma profession et de mon hobby.

Je remercie tout d'abord Pierre Mazet pour m'avoir fait confiance et permis de commencer ce travail de thèse. Je le remercie tout autant pour sa (trop courte) initiation à la vie, l'univers et tout le reste<sup>2</sup>.

Je remercie aussi mes enseignants de la préparation à l'agrégation qui se reconnaîtront et par qui les choses sérieuses ont commencé.

Je remercie bien entendu Vincent Mouysset pour sa constante disponibilité ainsi que pour son encadrement, une fois de plus parfaitement ficelé.

Je remercie de même Jean-Pierre Raymond pour avoir accepté de superviser cette thèse.

Je remercie Marc Bonnet et Houssem Haddar pour avoir accepté de rapporter cette thèse et pour le temps qu'ils y ont consacré.

Enfin, je remercie l'équipe M2SN de l'ONERA à Toulouse pour son accueil.



---

1. et je ne saurais dire qui a la plus grande

2. voir "Mathématiques"

---



---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Reconstruction de forme</b>	<b>15</b>
1.1 L'équation de Helmholtz . . . . .	15
1.1.1 La condition de radiation de Sommerfeld . . . . .	16
1.1.2 Le champ lointain . . . . .	17
1.1.3 Les sources ondes planes . . . . .	18
1.1.4 Fonctions de Green et potentiels . . . . .	19
1.1.5 Existence et unicité . . . . .	20
1.2 La méthode de "Linear Sampling" . . . . .	22
1.3 La méthode de "Factorization" . . . . .	24
1.3.1 Présentation de la méthode . . . . .	25
1.3.2 Construction de la méthode . . . . .	25
<b>2 Localisation de défauts</b>	<b>31</b>
2.1 Localisation des défauts par des fonctions test . . . . .	34
2.1.1 Localisation par les fonctions de Green . . . . .	34
2.1.2 Localisation par des valeurs en champ proche . . . . .	35
2.2 Factorisation de l'opérateur de mesures . . . . .	37
2.2.1 Factorisation de la différence entre les mesures physiques avant et après perturbation . . . . .	37
2.2.2 Symétrisation de la factorisation par l'opérateur de "scattering" . . . . .	41
2.3 Localisation des défauts par les mesures . . . . .	46
2.3.1 Majoration par continuité . . . . .	46
2.3.2 Minoration par coercivité . . . . .	47
2.3.3 Encadrement de la forme étudiée permettant la localisation les défauts . . . . .	49
<b>3 Méthodes de reconstruction du support des défauts</b>	<b>51</b>
3.1 Méthodes itératives . . . . .	53
3.1.1 Reconstruction du domaine par une méthode de plus grande pente . . . . .	57
3.1.2 Reconstruction du domaine par une méthode de gradient projeté . . . . .	58
3.1.3 Validation numérique sur un cas simple . . . . .	59

---

3.2	Méthodes directes . . . . .	61
3.2.1	Reconstruction du domaine par résolution explicite du problème de minimisation dans un cas particulier ( $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$ ) . . . . .	61
3.2.2	Reconstruction du domaine par une méthode spectrale ( $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$ ) . . . . .	65
3.3	Un opérateur de mesures simplifié ( $ W^\infty $ ) . . . . .	66
3.4	Comparaison des méthodes directes . . . . .	68
3.4.1	Construction du cas test . . . . .	68
3.4.2	Génération des données . . . . .	69
3.4.3	Comparaison des méthodes en présence d'un fort bruitage des mesures . . . . .	71
3.4.4	Sensibilité des méthodes à la fréquence des sources ondes planes . . . . .	72
3.4.5	Sensibilité des méthodes au nombre de mesures/émissions . . . . .	74
3.5	Extension des algorithmes . . . . .	75
3.5.1	Sensibilité à l'absorption . . . . .	75
3.5.2	Indices complexes et directions de mesures distinctes des directions d'émissions . . . . .	78
3.5.3	Sensibilité des méthodes à la précision de la connaissance du milieu ambiant . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Localisation de défauts et reconstruction d'indices</b>	<b>85</b>
4.1	La méthode de Gauss-Newton régularisée . . . . .	86
4.1.1	La méthode de Gauss-Newton . . . . .	88
4.1.2	Introduction de la régularisation . . . . .	89
	A - La régularisation de Tikhonov itérative en norme $L^2$ . . . . .	90
	B - La régularisation en variation totale . . . . .	91
4.1.3	Exemple d'application dans un cas simple . . . . .	93
4.2	Méthodes de Réduction du nombre de variables d'optimisation . . . . .	100
4.2.1	Méthode de reconstruction des valeurs de défauts . . . . .	101
	A - Présentation de la méthode . . . . .	101
	B - Exemples numériques . . . . .	102
4.2.2	Méthode de raffinement adaptatif des zones de reconstruction . . . . .	104
	A - Présentation de la méthode . . . . .	104
	B - Exemples numériques . . . . .	107
4.3	Un nouveau terme de fidélité . . . . .	115
4.3.1	Comparaison des valeurs de $J_{\mathcal{M}}$ et de $J$ dans un cas simple . . . . .	116
4.3.2	Une méthode de Gauss-Newton pour minimiser $J_{\mathcal{M}}$ . . . . .	118
4.3.3	Exemples d'application . . . . .	122
	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>

---

## Table des figures

---

1.1	Schéma des notations . . . . .	18
2.1	Objet avant et après perturbation . . . . .	31
3.1	Géométrie simple . . . . .	59
3.2	Reconstruction du domaine d'un défaut par des méthodes itératives en initialisant avec $x_0 = P_{\mathcal{C}_z}(0)$ . . . . .	60
3.3	Reconstruction du domaine d'un défaut par des méthodes itératives en initialisant avec $x_0 = 0$ . . . . .	60
3.4	Reconstruction du domaine d'un défaut par des méthodes directes . . . . .	64
3.5	Reconstruction du domaine d'un défaut par des méthodes directes simplifiées . . . . .	67
3.6	Géométrie utilisés pour les comparaisons . . . . .	68
3.7	Comparaison des méthodes avec 20% de bruit . . . . .	71
3.8	Comparaison des méthodes avec 50% de bruit . . . . .	72
3.9	Sensibilité à la fréquence . . . . .	73
3.10	Sensibilité au nombre de directions d'émissions/mesures . . . . .	75
3.11	Comparaison des méthodes en présence d'absorption faible . . . . .	76
3.12	Comparaison des méthodes en présence d'absorptions contrastées . . . . .	76
3.13	Comparaison des méthodes en présence d'absorptions contrastées . . . . .	77
3.14	Comparaison des méthodes en présence d'absorption forte . . . . .	77
3.15	Sensibilité à l'ouverture de l'ensemble des mesures . . . . .	79
3.16	Comparaison des méthodes avec une valeur de $n_0$ constante fixée à 100% de la moyenne de l'indice du milieu ambiant . . . . .	80
3.17	Comparaison des méthodes avec une valeur de $n_0$ constante fixée à 103% de la moyenne de l'indice du milieu ambiant . . . . .	81
3.18	Comparaison des méthodes avec une valeur de $n_0$ constante fixée à 105% de la moyenne de l'indice du milieu ambiant . . . . .	81
3.19	Comparaison des méthodes avec 50% de bruit ajouté aux valeurs de $n_0$ . . . . .	82
4.1	Cas simple d'indice . . . . .	94
4.2	Exemple de "L-curve" . . . . .	95
4.3	Gauss-Newton avec 36 paramètres . . . . .	97
4.4	Gauss-Newton avec 2035 paramètres . . . . .	97
4.5	Gauss-Newton avec régularisation $L^2$ et 36 paramètres . . . . .	98
4.6	Gauss-Newton avec régularisation $TV$ et 36 paramètres . . . . .	98
4.7	Gauss-Newton avec régularisation $L^2$ et 2035 paramètres . . . . .	99

---



---

4.8	Gauss-Newton avec régularisation $TV$ et 2035 paramètres . . . . .	99
4.9	Procédure pour l'identification de défauts . . . . .	101
4.10	Identification de défauts simples en seuillant à 70% . . . . .	102
4.11	Identification de défauts simples en seuillant à 25% . . . . .	103
4.12	Validation a posteriori de l'identification de défauts simples . . . . .	103
4.13	Valeurs d'un indice avant défauts . . . . .	105
4.14	Valeurs d'un indice avec défauts . . . . .	105
4.15	Identification de défauts pour un second exemple . . . . .	106
4.16	Validation a posteriori de l'identification de défauts . . . . .	106
4.17	Procédure pour le raffinement adaptatif de la géométrie . . . . .	107
4.18	Raffinement adaptatif : cycle 1 . . . . .	108
4.19	Raffinement adaptatif : cycle 2 . . . . .	109
4.20	Raffinement adaptatif : cycle 3 . . . . .	110
4.21	Comparaison du raffinement itératif avec l'indice recherché . . . . .	111
4.22	Evolution des coûts au cours des raffinements successifs . . . . .	111
4.23	Raffinement adaptatif pour un second exemple : cycles 1 et 2 . . . . .	112
4.24	Raffinement adaptatif pour un second exemple : cycle 3 . . . . .	113
4.25	Comparaison du raffinement itératif avec l'indice recherché . . . . .	114
4.26	Evolution des coûts au cours des raffinements successifs . . . . .	115
4.27	Comparaison de deux termes de fidélité, cas simple . . . . .	116
4.28	Comparaison de deux termes de fidélité, cas non-trivial bruité . . . . .	117
4.29	Comparaison de deux termes de fidélité en situation de reconstruction . . . . .	117
4.30	Comparaison des reconstructions par minimisation de $J$ et de $J_{\mathcal{M}}$ . . . . .	123
4.31	Comparaison des reconstructions par minimisation de $J$ et de $J_{\mathcal{M}}$ . . . . .	124

---

---

# Introduction

---

L'étude de la propagation des ondes, électromagnétiques mais aussi acoustiques, a donné lieu depuis les années 60 à un grand effort de recherche. De nombreuses applications, allant du radar à l'imagerie médicale par tomographie en passant par le contrôle non destructif de structures, reposent sur les connaissances en propagation d'ondes. Une forte demande génère donc une forte activité autour de l'élaboration et du perfectionnement des méthodes mises en oeuvre et ce sont ces applications qui sont visées dans cette étude. Les applications citées sont liées par une problématique commune : à partir de mesures physiques, retrouver des informations sur l'environnement étudié. Typiquement, on cherche une solution à un problème en connaissant les conditions initiales. On appelle ceci le problème direct. Par opposition, retrouver des conditions initiales à partir de la solution au problème direct (ou de mesures) est appelé un problème inverse.

## Problèmes inverses en propagation d'ondes

En propagation d'ondes, les objets peuvent être modélisés de plusieurs manières : soit on les considère comme imperméables aux ondes et on statue des conditions de surface, soit on les considère comme perméables et on les modélise par un indice de réfraction. Un problème inverse naturel est alors de retrouver l'indice de réfraction d'un milieu perméable aux ondes à partir de mesures. En présence d'obstacles non perméables, un problème inverse naturel est de retrouver la forme de l'obstacle.

Une difficulté majeure pour ces problèmes inverses est qu'ils sont mal posés. En effet, le problème direct, qui donne la propagation des ondes en fonction de la source et des objets diffractants considérés, est une transformation linéaire et compacte. En conséquence, il est impossible d'avoir un problème inverse continu, ce qui se traduit par une forte instabilité. Avoir des résultats fiables demande alors de gros efforts méthodologiques et généralement des résolutions numériques coûteuses.

Les problèmes de reconstruction d'indice d'un milieu ou de forme d'un obstacle sont de plus non-linéaires. Cela débouche là encore sur une augmentation des calculs nécessaires pour aboutir à une approximation du résultat cherché tout en restreignant le nombre ainsi que le cadre de validité des méthodes utilisables.

---

## Reconstruction de l'indice

Si on sait résoudre le problème direct, le problème inverse associé peut être vu comme un problème d'identification [Colton & Monk 1988, Colton & Monk 1992]. Les problèmes d'identification non-linéaires sont généralement traités par la méthode de Gauss-Newton [Björck 1996]. Cette méthode est itérative et chacune des itérations demande généralement autant de résolutions du problème direct que le nombre de constantes qu'on recherche pour une approximation de l'indice constante par morceaux. Le tout est alors très coûteux en temps de calcul. Par ailleurs, le caractère mal posé du problème se retrouve à chaque itération de cette méthode qu'il faut donc régulariser. Il existe plusieurs types de régularisation dont notamment celle de Tikhonov [Engl *et al.* 1989, Bakushinsky 1992]. Elle consiste à rajouter la norme au carré de l'inconnue à la fonctionnelle (linéarisée) des moindres carrés qu'on minimise. Un des intérêts de cette méthode est sa facilité de mise en oeuvre. Pour que le problème régularisé soit cohérent avec le problème initial, le terme de régularisation est dimensionné par un paramètre de régularisation. Calibrer ce paramètre est un problème en soi, souvent très coûteux en temps de calcul. Si on le choisit trop petit, l'instabilité du problème mal posé prend le dessus. Si on le choisit trop grand, le problème régularisé produit des solutions qui ne sont plus celles du problème inverse initialement considéré. Le principe de la méthode "L-curve" par exemple, est de considérer la courbe (en échelle log-log) de la norme de la solution régularisée en fonction de la norme du résidu. On sélectionne alors le paramètre pour lequel la courbure de cette courbe est maximale mais cette procédure est clairement très coûteuse [Hanke 1996, Hansen 1998]. On peut aussi trouver plus rapidement une approximation du paramètre maximisant la courbure de la "L-curve" par une méthode itérative de point fixe [Bazán & Francisco 2009]. Ceci étant, le principe de Morozov propose une borne inférieure pour ce paramètre de régularisation : le niveau de bruit supposé sur les mesures [Tikhonov 1995]. On recherche ainsi la solution avec une précision minorée par le bruit de mesure. Par ailleurs, le choix de la norme de régularisation influence tout autant les résultats de convergence. Des études furent menées dans un premier temps avec un paramètre de régularisation fixé et des termes de régularisation quadratiques en normes  $L^2$  ou  $H^1$  classiques. L'emploi d'une semi-norme BV élargit sensiblement l'ensemble des situations débouchant sur un résultat positif [Ségui 2000]. L'utilisation de cette norme s'appuie sur l'hypothèse que les indices recherchés sont généralement sous la forme d'un nombre restreint de zones dans lesquelles les valeurs prises sont quasi-constantes.

## Reconstruction de forme

Le problème de reconstruction de forme d'obstacles peut être traité de la même manière que le problème de reconstruction de l'indice d'un milieu. Mais l'information de la forme est entièrement contenue dans l'information des valeurs de l'indice. On peut dans ce cas espérer des reconstructions de forme plus rapides que les reconstructions d'indice. Les méthodes dites de "sampling" répondent à cette attente en localisant le support d'obstacles pour un coût calculatoire de l'ordre d'une seule résolution du problème direct. Ceci les rend intéressantes sur le plan applicatif. Le principe des méthodes de "sampling" est de localiser les obstacles par un test binaire et ponctuel. La forme de l'obstacle est alors

reconstruite comme l'ensemble des points passant le test. Différentes méthodes de ce type sont présentées par exemple dans [Potthast 2006].

Une branche fondatrice des méthodes de sampling a émergé à la fin des années 90 sous la forme de la “Linear Sampling Method” [Colton *et al.* 1997, Collino *et al.* 2002, Colton 2003]. Les difficultés de mise en oeuvre de la méthode complète ont conduit à l'élaboration de la “Factorization Method” [Kirsch 1998, Arens 2004, Gebauer *et al.* 2008]. Cette méthode facile à implémenter et rapide à exécuter permet une reconstruction de la forme d'obstacles dans l'air. Pour reconstruire la forme d'objets perméables aux ondes et absorbants, les méthodes de “Linear Sampling” et de “Factorization” doivent cependant être adaptées [Cakoni *et al.* 2002, Kirsch 2002]. A partir de 2005, cette méthode a été adaptée à la tomographie [Kirsch 2005, Gebauer 2006, Hyvönen 2007, Lechleiter *et al.* 2008] pour détecter des perturbations (des tumeurs par exemple) dans un milieu inhomogène à partir de mesures de surface. La détection d'obstacles dans un milieu inhomogène à partir de mesures en champ lointain est traitée pour la première fois en 2007 [Nachman *et al.* 2007].

Les méthodes de “Linear Sampling” et de “Factorization” sont conçues pour reconstituer la forme d'objets à partir de mesures en champ lointain, c'est-à-dire à grande distance. Or, les premières versions de ces méthodes supposent que les mesures soient disponibles tout autour de l'objet avec des sources ondes planes émises dans des directions entourant elles aussi entièrement l'objet. Ceci est peu pratique du point de vue applicatif. Cependant, le champ lointain est analytique et il est donc théoriquement suffisant de connaître ses valeurs sur un ouvert. D'une part, des travaux sont menés sur la reconstruction de champ lointain à partir de données incomplètes [Barucq *et al.* 2010]. Le pré-traitement des données par ce genre d'enrichissement permettrait alors d'utiliser les méthodes de sampling dans leur cadre d'application. D'autre part, la dernière adaptation de la “Factorization Method” est justifiée dans le cas de données incomplètes mais avec des directions d'émissions et de mesures qui coïncident.

## Objectifs et plan du manuscrit

On cherche à améliorer la recherche des valeurs de l'indice d'un objet perméable à partir des mesures en champ lointain. Pour cela nous nous intéressons plus précisément à une méthode de Gauss-Newton régularisée. C'est une méthode itérative de reconstruction de paramètres et il faut à-priori considérer un grand nombre de paramètres pour espérer capturer un indice non-trivial. Le coût calculatoire est ainsi généralement élevé. Or, il se peut que de nombreux paramètres soient égaux, et il est donc inutile de les rechercher séparément. Mais surtout, au cours des itérations certains paramètres continuent d'être recherchés alors qu'ils sont déjà reconstruits de manière satisfaisante. On voudrait alors pouvoir distinguer rapidement les paramètres correctement reconstruits des autres afin d'orienter la recherche vers les paramètres pour lesquels la précision relative est la moins bonne. C'est-à-dire déterminer localement si l'indice proposé correspond aux valeurs exactes ou pas. La “Factorization method” permet de localiser les perturbations dans un objet perméable, mais à partir de mesures de surface [Hyvönen 2007]. De plus, les formulations habituelles utilisent des noyaux de Green dont l'évaluation soulève des difficultés [Hyvönen *et al.* 2007, Egger *et al.* 2010, Hakula & Hyvönen 2009]. A notre connaissance,

il n'y a pas aujourd'hui de méthode rapide de localisation de perturbations dans un milieu inhomogène à partir de mesures en champ lointain.

**Chapitre 1.** Notre étude porte sur des problèmes inverses en propagation d'ondes basés sur des mesures faites à grande distance des objets étudiés. Ainsi, dans une première partie de cette thèse, nous présentons le problème de propagation des ondes acoustiques et le comportement asymptotique des solutions. Nous rappelons en particulier le caractère bien posé des équations pour des conditions asymptotiques bien choisies. Nous présentons ensuite deux méthodes populaires qui traitent qui traitent le problème inverse de la reconstruction du domaine d'un objet étudié et dont nous reprendrons le principe par la suite. La première de ces méthodes est celle dite du "Linear Sampling". Basée sur l'identification des paramètres de l'objet, elle remplace la reconstruction complète de ces paramètres par un test binaire qui fournit une fonction indicatrice du support de l'objet. Le gain se situe au niveau de la vitesse d'exécution. Cependant, l'interprétation des résultats pratiques soulève quelques difficultés qui sont traitées par la méthode de "Factorization". La méthode de "Factorization" est une variante de la méthode de "Linear Sampling" et c'est son principe que nous reprendrons pour la détection de défauts.

**Chapitre 2.** Dans une seconde partie nous établissons une caractérisation du support de perturbations dans un milieu inhomogène connu à partir de mesures en champ lointain sans évaluer les fonctions de Green du milieu ambiant. La plupart des méthodes dites de "sampling" se basent sur le même résultat préliminaire : le domaine recherché peut être caractérisé théoriquement par des sources ponctuelles. Nous adaptons alors ce résultat dans notre cadre d'étude. C'est sur le raccord entre ces fonctions tests et les mesures que se distinguent les différentes méthodes. La "Factorization Method" fournit une relation très simple à mettre en oeuvre entre fonctions tests et mesures. Nous démontrons alors que son principe peut aussi être appliqué à notre problème. Comme son nom l'indique, cette méthode repose sur une factorisation au préalable de l'opérateur de mesures. Nous aboutissons alors à une localisation des perturbations à partir des mesures sous forme d'une inégalité fonctionnelle qu'il faudra ensuite mettre en pratique.

**Chapitre 3.** Dans une troisième partie, nous traduisons la caractérisation obtenue à la partie précédente sous forme d'un problème de minimisation sous contraintes. Nous établissons alors différents algorithmes de résolution itératifs de ce problème, débouchant sur une visualisation du domaine des perturbations recherchées. De plus, sous certaines conditions nous montrons qu'il est aussi possible de visualiser ce domaine par des méthodes directes, bien plus rapides. Nous étudions alors une implémentation en deux dimensions des ces méthodes directes. Nous comparons en premier lieu les résultats obtenus avec des mesures simulées dans toutes les directions pour des objets non absorbants. Les expérimentations sont menées pour divers paramètres physiques ainsi que des défauts non triviaux afin de valider les résultats de la première partie. Nous étudions aussi une extension de ces algorithmes basée sur une conjecture. Cette extension permet de traiter le cas d'objets absorbants mais aussi d'arcs de mesures restreints. En particulier, nous traitons le cas où les directions de mesures sont distinctes des directions d'émission pour les sources ondes planes. A notre connaissance, ceci n'a encore jamais été réalisé avec des méthodes de "Fac-

---

torization”.

**Chapitre 4.** Dans la quatrième partie, nous considérons le problème global de la reconstruction des valeurs de l’indice de l’objet étudié. Ce problème est généralement traité de manière itérative et on peut considérer la reconstruction proposée comme une version perturbée de l’indice recherché. Or, nous disposons d’une méthode de localisation de perturbations dans un objet perméable connu à partir de mesures. Nous sommes donc en mesure de distinguer les zones où la reconstruction proposée est proche de l’indice exact et les zones où ce n’est pas le cas.

En nous appuyant sur cette information, nous proposons et illustrons numériquement deux procédures de reconstruction d’indice avec peu de paramètres. L’objectif de la première procédure est d’identifier les valeurs d’un défaut dans un objet connu après l’avoir localisé. Le nombre de paramètres nécessaires est ainsi réduit. La seconde procédure concerne le raffinement adaptatif de la reconstruction (itérative) d’un indice inconnu. En utilisant l’information des défauts entre l’indice reconstruit et l’indice recherché, nous proposons une manière d’augmenter le nombre de paramètres aux endroits d’intérêt. Le but est d’augmenter la précision en retrouvant les discontinuités de l’indice tout en conservant un nombre réduit de paramètres.

Enfin, nous proposons un nouvel indicateur de l’adéquation entre un indice donné et l’indice recherché. En effet, avec les méthodes développées dans la partie précédente on sait maintenant localiser les parties de l’indice proposé qui sont incorrectes. Nous proposons ainsi une méthode, illustrée numériquement, de reconstruction d’indice par la minimisation d’une fonction basée sur la localisation des défauts.



---

# Reconstruction de forme

---

Nous allons nous intéresser à des problèmes inverses en propagation d'ondes basés sur des mesures en champ lointain, mais pour les définir il faut avoir défini au préalable le problème direct. Nous présentons alors la modélisation de la propagation d'ondes en présence d'objets perméables ainsi que leur comportement asymptotique.

Nous présentons ensuite les méthodes de “Linear Sampling” et de “Factorization”. Ce sont des méthodes rapides de reconstruction de forme d'obstacles à partir de mesures en champ lointain sur lesquelles nous nous baserons pour développer notre méthode de reconstruction de forme de défauts.

Les applications pratiques sont naturellement visées dans l'espace en trois dimensions, mais, pour des raisons de simplicité, les exemples numériques sont menés en deux dimensions. Pour pouvoir passer facilement de l'un à l'autre nous laissons alors la dimension du problème en paramètre, noté  $d$ .

## 1.1 L'équation de Helmholtz

On considère la propagation d'ondes acoustiques, c'est-à-dire de variations de pression, de faible amplitude dans un milieu homogène d'un espace de dimension  $d = 2$  ou  $3$  vu comme un fluide non visqueux. Le mouvement du fluide est décrit par le système des équations d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ p = f(\rho, S), \\ \partial_t S + v \cdot \nabla S = 0, \end{cases}$$


---



où  $v$  est la vitesse,  $p$  la pression,  $\rho$  la densité,  $S$  l'entropie et  $f$  une fonction dépendant de la nature du fluide.

Si on suppose que  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$ , et  $S$  sont de petites perturbations autour d'un d'équilibre avec  $v_0 = 0$ , on peut alors considérer le système d'Euler linéarisé

$$\begin{cases} \partial_t v + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \\ \partial_t \rho + \rho_0 \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t p = \partial_\rho f(\rho_0, S_0) \partial_t \rho. \end{cases}$$

On peut alors chercher des solutions sous forme de potentiel de vitesse  $U(t, x)$  tel que  $v = \frac{1}{\rho_0} \nabla U$ , avec  $p = -\partial_t U$ . Ce potentiel de vélocité vérifie alors l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U - \Delta U = 0,$$

où la vitesse du son  $c$  est définie par  $c^2 = \partial_\rho f(\rho_0, S_0)$ .

Pour des ondes harmoniques en temps, c'est-à-dire de la forme  $U(t, x) = \operatorname{Re} \{u(x)e^{i\omega t}\}$ , où  $\omega > 0$  est la fréquence, la partie spatiale  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  vérifie alors l'équation de Helmholtz

$$-\frac{\omega^2}{c^2} u - \Delta u = 0.$$

Nous étudions la diffraction d'ondes par des objets perméables qu'on suppose à support compact noté  $D$ . Ceci induit une vitesse du son constante  $c(x) = c_0$  en dehors d'une certaine boule et les objets sont alors caractérisés par leur indice de réfraction  $n(x) = \frac{c_0^2}{c(x)^2}$ . On note  $D$  le lieu des objets qui est alors aussi le support de  $n(x) - 1$ . On suppose cet indice borné ( $n \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ), à valeurs complexes pour les objets absorbants et à valeurs réelles autrement. De plus, on suppose que la partie imaginaire de l'indice est signée, par exemple positive ( $\operatorname{Im} n(x) \geq 0$ ) mais toutes les démonstrations peuvent être adaptées au cas négatif. Enfin, on définit le nombre d'onde par  $k = \frac{\omega}{c_0}$ , et on obtient la formulation classique de l'équation de Helmholtz pour les milieux in-homogènes

$$\Delta u_n(x) + k^2 n(x) u_n(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.1)$$

Pour un indice  $n \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ , on note  $\mathcal{H}_n(\mathcal{O})$  l'espace des solutions de l'équation de Helmholtz dans un ouvert  $\mathcal{O}$

$$\mathcal{H}_n(\mathcal{O}) = \{f \in L^2(\mathcal{O}), \Delta f + k^2 n f = 0\}. \quad (1.2)$$

### 1.1.1 La condition de radiation de Sommerfeld

La diffraction est la modification du comportement de l'onde en présence d'objets diffractants. Notons  $u^i$  l'onde incidente qui correspond à l'onde qu'on aurait en l'absence d'objets. Cette onde incidente vérifie donc

$$\Delta u^i + k^2 u^i = 0. \quad (1.3)$$

On note alors  $u^s$  le champ diffracté qui est la différence entre l'onde totale et l'onde incidente :

$$u_n = u^i + u^s. \quad (1.4)$$

Comme on a sorti le temps de l'équation, on ne peut plus distinguer les temps positifs des temps négatifs. Il faut alors ajouter une condition, dite de radiation, pour distinguer les champs diffractés ayant un comportement sortant de ceux ayant un comportement entrant [Petkov 1989, Section 2.6]. Pour les ondes acoustiques, le système (1.1)-(1.4) est fermé par la condition de radiation de Sommerfeld [Sommerfeld 1912]

$$\partial_r u^s = iku^s + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right). \quad (1.5)$$

### 1.1.2 Le champ lointain

Nous considérons des mesures effectuées à grande distance des objets. Cela veut dire qu'on mesure le comportement asymptotique du champ diffracté après avoir émis une onde incidente. Comme on suppose le support des objets compact, en dehors de ce support le champ diffracté, c'est-à-dire la quantité  $(u_n - u^i)$  vérifie l'équation de Helmholtz (1.1) avec  $n(x) = 1$  ainsi que la condition de radiation de Sommerfeld (1.5). Toute onde vérifiant l'équation (1.1) avec  $n(x) = 1$  en dehors d'une certaine boule et la condition de radiation (1.5) possède un comportement asymptotique qui est analytique et ne dépend que de la direction d'observation  $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  [Colton & Kress 1998, Théorème 2.5]. Le comportement asymptotique du champ diffracté  $(u_n - u^i)$  est appelé champ lointain de la solution  $u_n$ . On le note  $u_n^\infty \in \mathcal{C}^\infty(S^{d-1})$  et le champ total  $u_n$  vérifie alors le développement d'Atkinson suivant [Venkov 2008]

$$u_n(x) = u^i(x) + \gamma \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} u_n^\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right), \quad (1.6)$$

où  $\gamma$  ne dépend que de la dimension et est défini par

$$\gamma := \begin{cases} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} & \text{si } d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} & \text{si } d = 3. \end{cases} \quad (1.7)$$

**Remarque 1.1.** Cette notation du champ lointain suit la convention employée par exemple dans [Kirsch & Grinberg 2008]. Une autre convention est aussi utilisée pour noter le champ lointain dans certains ouvrages comme par exemple [Colton & Kress 1998] où le coefficient  $\gamma$  est intégré dans la notation  $u_n^\infty$ . On a ainsi

$$(u_n - u^i)(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} u_n^\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right). \quad (1.8)$$

*Ceci change les constantes dans certains des résultats que nous présentons.*

Si le champ lointain est nul, le champ diffracté dont il est issu est nul dans l'ensemble où il vérifie l'équation de Helmholtz avec  $n(x) = 1$ .

**Lemme 1.2** (Unicité du champ lointain). *[Colton & Kress 1998, Théorème 2.13] Soit  $D$  un ensemble borné de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{D})$  une fonction vérifiant l'équation de Helmholtz avec  $n(x) = 1$  ainsi que la condition de radiation de Sommerfeld. Si son champ lointain est nul, alors  $u = 0$  en dehors de  $\overline{D}$ .*

### 1.1.3 Les sources ondes planes

Il existe un type d'ondes particulier appelé ondes planes. On les utilise comme onde incidente dans de nombreux cas pour plusieurs raisons. Premièrement, ce sont des sources qu'on peut générer en pratique, ce qui est fondamental pour les applications réelles. En effet, les ondes planes correspondent au rayonnement émis par une source ponctuelle située à grande distance. Il suffit donc que les objets étudiés soient à une distance suffisante d'un émetteur pour que l'onde incidente en pratique soit assez proche d'une onde plane. Deuxièmement, elles ont une expression analytique très simple donnée par

$$u^i(\theta, x) := e^{ik\theta \cdot x},$$

où  $\theta$  est vecteur normalisé de  $\mathbb{R}^d$  donnant la direction d'émission et  $x$  un point de  $\mathbb{R}^d$ .

On définit alors la solution au système (1.1)-(1.5) avec une source onde plane de direction d'émission  $\theta$  par

$$u_n(\theta, x).$$

De même, on note le champ lointain dans la direction  $\hat{x}$  du champ diffracté en présence d'une onde plane de direction d'émission  $\theta$  par

$$u_n^\infty(\theta, \hat{x}).$$

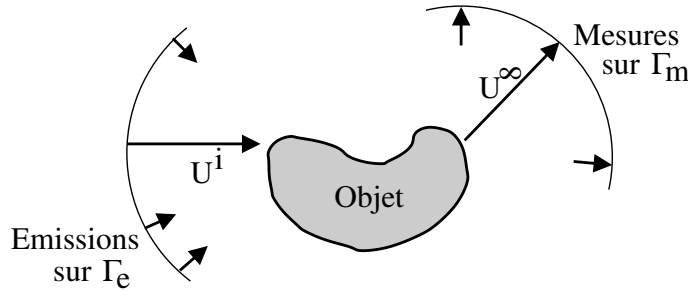


FIGURE 1.1: Schéma des notations

On note  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_m$  les sous ensemble de la sphère unité  $S^{d-1}$  correspondants respectivement aux directions d'émissions et de mesures, comme illustré sur la Figure 1.1.

Par ailleurs, avec des sources ondes planes le champ lointain vérifie une relation de réciprocité : on peut permuter les directions d'émission et d'observation, en changeant le signe pour faire le "chemin" en sens inverse, sans que cela ne change la valeur du champ lointain obtenu.

**Lemme 1.3** (Principe de réciprocité). *[Colton & Kress 1998, Théorème 3.13]*

$$u_n^\infty(\theta, \hat{x}) = u_n^\infty(-\hat{x}, -\theta), \quad \theta, \hat{x} \in S^{d-1}.$$

### 1.1.4 Fonctions de Green et potentiels

De nombreuses propriétés pour l'équation de Helmholtz, à commencer par l'existence et l'unicité des solutions, sont démontrées en utilisant des éléments de la théorie du potentiel. Les potentiels sont des opérateurs intégraux ayant pour noyau la fonction de Green du système traité.

La fonction de Green pour l'équation de Helmholtz (1.1) avec une singularité au point  $z \in \mathbb{R}^d$  et la condition de radiation de Sommerfeld (1.5) est alors notée

$$\Phi_n(z, x), \quad z, x \in \mathbb{R}^d,$$

et elle vérifie par définition

$$(\Delta + k^2 n(x)) \Phi_n(z, x) = -\delta(z - x). \quad (1.9)$$

Comme  $\Phi_n(z, \cdot)$  vérifie l'équation de Helmholtz avec  $n = 1$  en dehors de la boule de rayon  $|z|$  et la condition de radiation de Sommerfeld, elle possède un comportement asymptotique noté

$$\Phi_n^\infty(z, \hat{x}), \quad z \in \mathbb{R}^d, \hat{x} \in S^{d-1},$$

et défini par la relation

$$\Phi_n(z, x) = \gamma \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} \Phi_n^\infty(z, \frac{x}{|x|}) + o\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right). \quad (1.10)$$

Dans le cas particulier  $n(x) = 1$ , c'est-à-dire sans objets diffractants, on a une expression analytique de la fonction de Green et de son comportement asymptotique

$$\begin{aligned} \Phi_1(z, x) &:= \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|z - x|), & z \neq x, \text{ si } d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|z-x|}}{|z-x|}, & z \neq x, \text{ si } d = 3, \end{cases} \\ \Phi_1^\infty(z, \hat{x}) &:= e^{-ik\hat{x} \cdot z}, \end{aligned}$$

où  $H_0^{(1)}$  est la première fonction de Hankel d'ordre 0 [Colton & Kress 1998, Section 3.4].

**Remarque 1.4.** Cette formulation analytique du comportement asymptotique de la fonction de Green dans le cas d'un indice constant amène deux remarques.

1. Le comportement asymptotique de la fonction de Green d'un milieu homogène avec un indice normalisé est très facile à évaluer. C'est précisément une onde plane de direction d'émission  $\theta = -\hat{x}$ , où encore le conjugué d'une onde plane standard :

$$u^i(\hat{x}, z) = \Phi_1^\infty(-\hat{x}, z) = \overline{\Phi_1^\infty(\hat{x}, z)}. \quad (1.11)$$

Ces deux caractéristiques sont fortement exploitées dans les méthodes de “Linear sampling” et de “Factorization” pour distinguer des objets dans un milieu ambiant homogène.

2. Avec la seconde convention (1.8) pour la définition du champ lointain, on a en fait  $\Phi_1^\infty(z, \hat{x}) := \gamma e^{-ik\hat{x} \cdot z}$  et ainsi  $u^i(\hat{x}, z) = \gamma^{-1} \Phi_1^\infty(-\hat{x}, z)$ .

La fonction de Green servent en particulier comme noyau pour définir un opérateur intégral appelé potentiel volumique.

**Lemme 1.5.** [Mikhlin 1970, pages 158 et suivantes] L'opérateur  $V_n : L^2(D) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$  défini par

$$V_n h(x) := \langle h, \overline{\Phi_n(\cdot, x)} \rangle_{L^2(D)}, \quad x \in D, \quad (1.12)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(D)}$  est le produit scalaire hermitien classique de l'espace de Hilbert  $L^2(D)$ , c'est-à-dire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(D)} = \int_D f \bar{g},$$

est bien défini, compact et vérifie la condition de radiation de Sommerfeld (1.5).

Le comportement asymptotique du potentiel volumique est donné par l'opérateur (compact)  $V_n^\infty : L^2(D) \rightarrow L^2(\Gamma_m)$  défini par

$$V_n^\infty h(\hat{x}) := (V_n h)^\infty(\hat{x}) = \left\langle h, \overline{\Phi_n^\infty(\cdot, \hat{x})} \right\rangle_{L^2(D)}, \quad \hat{x} \in \Gamma_m, \quad (1.13)$$

qui vérifie la relation

$$V_n h(x) = \gamma \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} V_n^\infty h\left(\frac{x}{|x|}\right) + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right).$$

### 1.1.5 Existence et unicité

Le système (1.1)-(1.5) donne le champ diffracté  $u^s$  linéairement en fonction des valeurs de  $u^i$  dans  $D$ . On peut alors considérer le champ total  $u_n$  dans  $D$  défini par le système (1.1)-(1.5) en fonction de  $u^i \in L^2(D)$ . Il est démontré que résoudre ce système est équivalent à résoudre l'équation de Lippmann-Schwinger [Colton & Kress 1998, Section 8.2]

$$u_n = u^i + V_1(k^2(n-1)u_n). \quad (1.14)$$

L'existence et l'unicité de la solution sont alors obtenues par la théorie de Fredholm. La justification repose, dans le cadre de l'équation de Helmholtz pour les objets perméables, sur deux résultats : le lemme de Rellich [Wilcox 1975] et le Principe de Continuation Unique (UCP). Le principe de continuation unique est généralement connu pour des indices de réfraction continus, aussi en citons-nous une version adaptée aux indices simplement bornés.

**Lemme 1.6** (Principe de Continuation Unique). [Ségué 2000, Théorème 2.1.4] Soit  $n \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  vérifiant  $n(x) = 1$  pour  $|x| \geq a$ . soit  $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$  une solution de l'équation de Helmholtz (1.1) dans  $\mathbb{R}^d$  telle que  $u(x) = 0$  pour  $|x| \geq b$  avec  $b \geq a$ . Alors  $u = 0$  dans  $\mathbb{R}^d$  tout entier.

Le lemme de Rellich, quand à lui, sera utilisé sous la forme suivante.

**Lemme 1.7** (Rellich). *[Colton & Kress 1998, Théorème 2.12] Soit  $D$  un ouvert borné ayant une frontière  $\partial D$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et soit  $\nu$  la normale extérieure. Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{D}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^d \setminus D)$  une solution à l'équation de Helmholtz (1.1) vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld (1.5). Si*

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D} u \partial_\nu \bar{u} \geq 0,$$

*alors  $u = 0$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \overline{D}$ .*

On peut alors définir le champ total  $u_n$  comme image de la source  $u^i$  par un isomorphisme.

**Proposition 1.8.** *L'application  $\mathcal{T}_n$  définie par*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n & : & \mathcal{H}_1(D) \rightarrow \mathcal{H}_n(D), \\ & & u^i \mapsto u_n, \end{array} \quad (1.15)$$

*qui donne  $u_n$ , l'unique solution du système (1.1)-(1.5), en fonction d'une source  $u^i$  est un isomorphisme. Par ailleurs, pour toute source  $u^i \in \mathcal{H}_1(D)$ , la fonction  $\mathcal{T}_n u^i(x)$  se prolonge de manière unique à  $\mathbb{R}^d$ .*

**Démonstration rapide :** On utilise l'équivalence entre le système (1.1)-(1.5) et l'équation de Lippmann-Schwinger (1.14). D'après le Lemme 1.5, l'opérateur  $V_1$  est compact. Ainsi, par l'alternative de Fredholm, si l'opérateur  $(I - V_1 k^2(n-1))$  est injectif, il est automatiquement inversible et d'inverse continu. Il suffit donc de montrer que  $u^i = 0$  implique  $u_n = 0$ .

Comme  $u^i = 0$ , on a donc  $u_n$  qui vérifie la condition de radiation de Sommerfeld (1.5) et l'équation de Helmholtz (1.1). Or, par la formule de Green, on a

$$\int_{\partial D} u \partial_\nu \bar{u} = \int_D \left( |\nabla u|^2 - k^2 \bar{n} |u|^2 \right).$$

Avec l'hypothèse que l'indice  $n(x)$  a une partie imaginaire à valeurs positives, on peut alors appliquer le lemme de Rellich 1.7 et conclure que  $u_n = 0$  en dehors de  $D$ .

Le principe de continuation unique 1.6 donne ensuite  $u_n = 0$  partout. Ainsi, pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  contenant  $D$ , l'opérateur  $\mathcal{T}_n$  coïncide avec l'opérateur  $(I - V_1 k^2(n-1))^{-1}$  sur l'espace  $\mathcal{H}_1(\mathcal{O})$  défini en (1.2).

Finalement, on voit par l'équation de Lippmann-Schwinger (1.14) qu'on peut prolonger  $\mathcal{T}_n u^i$  à  $\mathbb{R}^d$  une fois l'image définie sur  $D$ . ■

## 1.2 La méthode de “Linear Sampling”

Parmi les méthodes de reconstruction de forme les plus populaires se trouve la méthode de “Linear Sampling” [Colton *et al.* 1997]. Cette méthode a initialement été développée pour reconstruire la forme d’obstacles, c’est-à-dire d’objets non perméables aux ondes, situés dans un milieu homogène à partir de mesures et d’émissions couvrant l’ensemble des directions possibles. Des études ont été menées pour des obstacles ayant des conditions au bord de Dirichlet ( $u|_{\partial_D} = 0$ ), de Neumann ( $\partial_\nu u|_{\partial_D} = 0$ ),  $\partial_\nu u$  étant la dérivée normale extérieure) ou un mélange des deux [Cakoni & Colton 2003]. La méthode de “Linear Sampling” a aussi été étudiée dans le cas d’objets perméables aux ondes [Cakoni *et al.* 2002]. Dans chacun de ces cas, le résultat ne dépend pas des conditions de bord ou de la perméabilité de l’objet. On n’a donc pas besoin de connaître le type d’objet dont on cherche la forme pour lui appliquer cette méthode, ce qui la rend flexible.

### Présentation de la méthode

Le principe de la méthode de “Linear Sampling” est de choisir un ensemble de points de l’espace  $\{z_i\}_{i=1,2,\dots}$  et de tester chacun séparément pour savoir s’il est à l’intérieur de l’obstacle ou non. Ceci donne alors une localisation du support de l’obstacle. Le test en question est inspiré des méthodes d’identification de paramètres générales : on compare les champs mesurés avec les champs théoriques qu’on aurait pour une source ponctuelle en l’absence d’obstacles et on cherche à faire correspondre les deux. Si la correspondance est possible, c’est que la source ponctuelle correspond à un point en dehors de l’obstacle. Pour cela, il faut donc regrouper les champs mesurés sous la forme d’un opérateur et connaître les champs qu’on aurait pour une source ponctuelle en l’absence d’obstacles.

Les ondes planes sont parmi les sources que l’on sait générer. On considère alors les mesures issues de sources de type onde plane et on les regroupe dans l’opérateur de mesures  $F_n : L^2(\Gamma_e) \rightarrow L^2(\Gamma_m)$ , appelé opérateur de champ lointain et défini par

$$F_n g(\hat{x}) := \langle g, \overline{u_n^\infty(\cdot, \hat{x})} \rangle_{L^2(\Gamma_e)}, \quad \hat{x} \in \Gamma_m, \quad (1.16)$$

où  $u_n^\infty$  est le champ lointain associé à la solution du système (1.1)-(1.5) comme défini en (1.6).

L’opérateur de champ lointain peut aussi être vu comme la mesure du champ lointain pour une source composée d’une distribution d’ondes planes. Les sources constituées par une superposition d’ondes planes sont appelées fonctions de Herglotz et sont alors les images de l’opérateur de Herglotz  $H : L^2(\Gamma_e) \rightarrow L^2(D)$  défini par

$$Hg(z) := \left\langle g, \overline{u^i(\cdot, z)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_m)}, \quad z \in D. \quad (1.17)$$

Cet ensemble de sources est intéressant pour plusieurs aspects. En particulier, les ondes planes sont des sources que l’on sait générer physiquement, mais de plus, l’ensemble des fonctions de Herglotz est dense dans l’ensemble de toutes les sources  $L^2(D)$  possibles. On sait donc générer sous cette forme toutes les sources, au moins par densité.

**Lemme 1.9** (Densité des fonctions de Herglotz). [*Colton & Kress 1998*, Théorème 5.24] *L’opérateur intégral de Herglotz  $H$  est injectif et d’image dense quand  $k^2$  n’est pas valeur propre de l’opérateur  $-\Delta$  avec condition de Dirichlet dans  $D$ .*

Par ailleurs, le comportement asymptotique pour une source ponctuelle centrée au point  $z_i$  en l’absence d’objets est l’asymptotique de la fonction de Green du milieu ambiant  $\Phi_1^\infty(z_i, \cdot)$ . Ainsi, dans un milieu homogène normalisé on a une expression analytique de ce comportement asymptotique :  $\Phi_1^\infty(z, \hat{x}) = e^{-ik\hat{x} \cdot z}$ .

On a alors tous les éléments pour étudier l’équation de champ lointain

$$F_n g = \Phi_1(z_i, \cdot), \quad (1.18)$$

et par interprétation des résultats on va reconstruction la forme de l’obstacle. Cependant, comme on l’a vu, l’ensemble global des sources n’est accessible que par densité et de plus, cette équation n’est quasiment jamais résoluble, il faut donc la régulariser. On obtient alors le résultat de la méthode de “Linear sampling” qui intègre ces deux limites.

**Proposition 1.10** (La méthode de “Linear Sampling”). [*Cakoni et al. 2002*, Théorème 4.5] *Sous certaines hypothèses de régularité du bord  $\partial D$  et avec un indice  $n(x)$  continu tel que  $\text{Im } n \geq 0$ , à l’exception d’un ensemble discret de valeurs de  $k$  on a*

1. *Si  $z \in D$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une solution  $g^\varepsilon(z_i, \cdot) \in L^2(S^{d-1})$  à l’inégalité*

$$\|F_n[g^\varepsilon(z_i, \cdot)] - \Phi_1^\infty(z_i, \cdot)\|_{L^2(\Gamma_m)} < \varepsilon,$$

*telle que*

$$\lim_{z_i \rightarrow \partial D} \|g^\varepsilon(z_i, \cdot)\|_{L^2(\Gamma_e)} = \infty \text{ et } \lim_{z_i \rightarrow \partial D} \|H[g^\varepsilon(z_i, \cdot)]\|_{H^1(D)} = \infty.$$

2. *Si  $z \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{D}$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$ , il existe une solution  $g^{\varepsilon, \delta}(z_i, \cdot) \in L^2(S^{d-1})$  à l’inégalité*

$$\|F_n[g^{\varepsilon, \delta}(z_i, \cdot)] - \Phi_1^\infty(z_i, \cdot)\|_{L^2(\Gamma_m)} < \varepsilon + \delta,$$

*telle que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|g^{\varepsilon, \delta}(z_i, \cdot)\|_{L^2(\Gamma_e)} = \infty \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \|H[g^{\varepsilon, \delta}(z_i, \cdot)]\|_{H^1(D)} = \infty.$$

**Remarque 1.11.** *La proposition originale de la référence citée se place dans le cas particulier où les données sont connues sur toute la sphère unité. C’est-à-dire pour  $\Gamma_e = \Gamma_m = S^{d-1}$ . Cependant, comme indiqué dans [*Cakoni & Colton 2006*, Section 4.5], cette hypothèse n’est pas nécessaire.*

Ainsi, pour obtenir une visualisation du support des obstacles on résout une version régularisée de l’équation de champ lointain en chaque point  $z_i$  testé et on trace la valeur de (la norme de) la solution ou de la fonction de Herglotz associée. D’après la proposition 1.10 le support des obstacles est alors constitué des zones où les valeurs sont faibles. Typiquement, on trace plutôt l’inverse de ces valeurs, et l’extérieur de l’obstacle correspond alors aux zones de valeurs proches de zéro.



## Idée de la preuve

La preuve repose sur la caractérisation d'un domaine par les sources ponctuelles et un résultat de densité des fonctions de Herglotz.

Le champ engendré par une source ponctuelle centrée en  $z \in \mathbb{R}^d$  dans un milieu homogène en l'absence d'objets est la fonction  $\Phi_1(z, \cdot)$  et son comportement asymptotique est  $\Phi_1^\infty(z, \cdot)$ . On compare alors ce comportement asymptotique aux champs lointains possibles en présence de l'objet. Si parmi ces rayonnements (avec objets), il en existe un qui soit égal au comportement asymptotique de la source ponctuelle (sans objets), alors on montre que cette source ne peut être en dehors du support de l'objet. En effet, dans le cas contraire on pourrait mesurer la même chose avec et sans les objets, ce qui est contradictoire.

Ceci se formalise en définissant l'opérateur de rayonnement  $G_n : L^2(D) \rightarrow L^2(\Gamma_m)$  par

$$G_n u^i := u_n^\infty.$$

Cet opérateur est proche de l'opérateur de champ lointain, mais n'est pas relié aux mesures. En effet, il engendre les champs lointains pour toutes les sources  $u^i \in L^2(D)$  alors que l'opérateur de champ lointain ne considère que les sources de type fonctions de Herglotz. On a alors d'après [Kirsch 1999, Théorème 4.4] la caractérisation suivante : à l'exception d'un ensemble discret de valeurs de  $k$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^d$ ,

$$z \in D \iff \Phi_1^\infty(z, \cdot) \in \mathcal{R}(G_n). \quad (1.19)$$

Par contre, comme l'opérateur de champ lointain  $F_n$  associe à une fonction de Herglotz son champ lointain, on peut le factoriser sous la forme

$$F_n = G_n H. \quad (1.20)$$

Ainsi, si  $z \in D$  on a une solution par densité de fonctions de Herglotz (Lemme 1.9) à l'équation de champ lointain (1.18). Ceci donne le premier point de la proposition 1.10.

Inversement, si  $z \notin D$  alors  $\Phi_1^\infty(z, \cdot)$  n'est pas dans l'image de  $G_n$ . Cependant, on montre que  $G_n$  est d'image dense [Cakoni et al. 2002, Théorème 4.3]. On peut alors résoudre une version régularisée de l'équation de champ lointain (1.18) et cette solution tend nécessairement vers l'infini (en norme) quand le paramètre de régularisation tend vers 0. Ceci donne le second point de la proposition 1.10.

## 1.3 La méthode de “Factorization”

La méthode de “Factorization” est une alternative à la méthode du “Linear Sampling” développée afin d'éviter les difficultés induites par le recours à la densité et à la régularisation [Arens 2004]. En effet, la Proposition 1.10 indique l'existence de fonctions  $g^\varepsilon(z_i, \cdot)$  dont le comportement permet de reconstruire le support de l'objet étudié, mais rien ne garantit que les solutions effectivement calculées en résolvant une version régularisée de l'équation (1.18) correspondent à ces fonctions  $g^\varepsilon(z_i, \cdot)$ .

### 1.3.1 Présentation de la méthode

Au lieu de considérer l'équation (1.18), on considère maintenant l'équation

$$|F_n|^{\frac{1}{2}} g = \Phi_1(z_i, \cdot), \quad (1.21)$$

où l'opérateur  $|F_n|$  est défini par  $|F_n| = (F_n^* F_n)^{\frac{1}{2}}$ . On montre alors que les points dans le support de l'objet sont exactement ceux pour lesquels cette équation est résoluble. Ceci a été initialement démontré pour le cas d'obstacles non perméables dans [Kirsch 1998] et le même résultat s'applique dans le cas d'objets perméables mais non-absorbants [Kirsch 1999, Théorème 4.3]. Cependant, dans le cas d'objets absorbants ( $n(x) \in \mathbb{C}$ ), ou de données incomplètes ( $\Gamma_m \subsetneq S^{d-1}$ ), cette caractérisation n'est plus justifiée.

On montre alors dans [Kirsch 2002] et [Grinberg 2006] qu'on peut encore caractériser le domaine  $D$  par la résolubilité de l'équation (1.21), mais en remplaçant l'opérateur  $|F_n|$  par un autre opérateur, noté  $F_{\#}$ , toujours construit à partir des mesures et défini par

$$F_{\#} = |F + F^*| + |F - F^*|.$$

On obtient alors la caractérisation du domaine  $D$  par l'image d'un opérateur connecté aux mesures.

**Proposition 1.12** (La méthode de “Factorization”). *[Kirsch 1999, Théorème 4.3] Hormis pour un ensemble discret de valeurs de  $k$  et certains comportements de l'indice de réfraction sur le bord de l'objet, si les ensembles de directions de mesures et d'émissions coïncident ( $\Gamma_e = \Gamma_m$ ), alors on a*

$$z \in D \iff 0 < \mathcal{F}(z) := \left( \sum_j \frac{|\langle \Phi_1^\infty(z, \cdot), \Psi_j \rangle|^2}{|\lambda_j|} \right)^{-1},$$

où  $(\lambda_j, \Psi_j)$  sont respectivement les valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur  $F_{\#}$ .

### 1.3.2 Construction de la méthode

La méthode de “Factorization” reprend le point de départ de la méthode de “Linear Sampling”, à savoir la caractérisation du domaine recherché par les sources ponctuelles (1.19) et la factorisation de l'opérateur de mesures (1.20). La différence avec la méthode de “Linear sampling” réside dans la manière de connecter l'image de l'opérateur  $G_n$  aux mesures. Cette connexion s'appuie sur un résultat d'analyse fonctionnelle qui caractérise l'image d'opérateurs continus.

#### Caractérisation de l'image d'un opérateur continu

Le lien entre l'image de l'opérateur  $G_n$  et les mesures a initialement présenté sous la forme d'un problème de minimisation sous contrainte dans [Kirsch & Grinberg 2008, Théorème 1.16]. Ce résultat d'analyse fonctionnelle au centre de la méthode de “Factorization” a été reformulé de la manière plus concise suivante.

**Lemme 1.13** (Caractérisation de l'image d'un opérateur). [*Nachman et al. 2007*, Lemme 2.1] Soit  $L : H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur continu et soit  $\varphi \in H_2$ . Alors  $\varphi \in \mathcal{R}(L)$  si et seulement s'il existe  $c > 0$  telle que pour tout  $\Psi \in H_2^*$  on ait

$$|\langle \Psi, \varphi \rangle| \leq c \|L^* \Psi\|.$$

**Démonstration rapide :** S'il existe  $c > 0$  telle que pour tout  $\Psi \in H_2^*$  on ait  $|\langle \Psi, \varphi \rangle| \leq c \|L^* \Psi\|$ , alors on peut définir la fonctionnelle  $j_\varphi(L^* \Psi) = \langle \Psi, \varphi \rangle$  sur tout l'espace en la prolongeant par 0. Ensuite, par identification de Riesz, on a l'existence d'un élément  $f_\varphi$  tel que  $j_\varphi(g) = \langle g, f_\varphi \rangle$ . Alors, pour tout  $\Psi$  on a  $\langle \Psi, \varphi \rangle = j_\varphi(L^* \Psi) = \langle L^* \Psi, f_\varphi \rangle = \langle \Psi, L f_\varphi \rangle$ . ■

Ainsi, on peut caractériser l'image d'un opérateur par toute forme comparable à l'adjoint de cet opérateur.

**Corollaire 1.14.** Avec les notations du Lemme 1.13, soit une forme  $f : H_2^* \rightarrow \mathbb{R}$  comparable à  $L^*$  par l'existence de constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que

$$c_1 \|L^* \Psi\| \leq f(\Psi) \leq c_2 \|L^* \Psi\|, \quad \Psi \in H_2^*.$$

Alors  $\varphi \in \mathcal{R}(L)$  si et seulement s'il existe  $c_3 > 0$  telle que, pour tout  $\Psi \in H_2^*$ , on ait

$$|\langle \Psi, \varphi \rangle| \leq c_3 f(\Psi).$$

**Démonstration :** C'est immédiat. ■

De ce fait, si on construit, à partir des mesures, une forme qui soit comparable à  $\|G_n^* \Psi\|$ , on peut caractériser l'image de  $G_n$  au travers des mesures. L'image de l'opérateur  $G_n$  caractérisant le domaine  $D$ , ceci aboutit à une caractérisation par les mesures du domaine recherché.

Le principe de la méthode de "Factorization" est alors de factoriser l'opérateur de mesures  $F_n$  de manière à exhiber l'opérateur  $G_n$  et construire une forme qui soit comparable à  $\|G_n^* \Psi\|$ .

### Factorisation de l'opérateur de mesures

On montre dans [*Kirsch 1998*, Lemme 2.3 & Théorème 2.4] qu'il existe un automorphisme  $E$  tel que l'opérateur de champ lointain  $F_n$  ait une factorisation de la forme

$$F_n = G_n E_1 G_n^*.$$

Ainsi, la fonctionnelle  $f_F$  définie sur  $L^2(D)$  par

$$f_F(\Psi) := |\langle F_n \Psi, \Psi \rangle|^{\frac{1}{2}},$$

permet déjà d'exhiber un domaine contenant  $D$ . En effet on a

$$f_F(\Psi) = |\langle E_1 G_n^* \Psi, G_n^* \Psi \rangle|^{\frac{1}{2}} \leq \|G_n^* \Psi\|. \quad (1.22)$$

Donc, s'il existe  $c > 0$  telle que pour tout  $\Psi \in \Gamma_e$ , on ait  $|\langle \Psi, \Phi_1^\infty(z, \cdot) \rangle| \leq c f_F(\Psi)$ , par le Lemme 1.13 on a  $\Phi_1^\infty(z, \cdot) \notin \mathcal{R}(G_n)$  et il suit par la relation (1.19) que  $z \notin D$ .

### Caractérisation du domaine recherché à partir des mesures

Pour que la forme  $f_F$  soit comparable à l'adjoint de l'opérateur  $G_n$  il manque donc la minoration  $\|G_n^* \Psi\| \leq f_F(\Psi)$ . On voit dans l'égalité de la relation (1.22) que cette minoration est équivalente à la coercivité de l'opérateur  $E_1$ . Cette coercivité découle du [Kirsch & Grinberg 2008, Théorème 4.8] qui repose sur le lemme suivant dont nous nous resservirons par la suite.

**Lemme 1.15** (Coercivité). [Kirsch & Grinberg 2008, Lemme 1.17] *Soit  $X$  un espace de Banach réflexif et  $\mathcal{X}$  un fermé de  $X$ . Si  $A, A_0 : X \rightarrow X^*$  sont des opérateurs linéaires continus tels que*

1.  $\langle A\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  pour toute fonction  $\varphi$  dans  $\mathcal{X}$  privé de l'origine,
2.  $\langle A_0\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}_+$  et il existe  $c > 0$  tel que  $\langle A_0\varphi, \varphi \rangle \geq c \|\varphi\|_X^2$  pour toute fonction  $\varphi$  dans  $\mathcal{X}$ ,
3.  $A - A_0$  est compact,

alors  $A$  est coercif au moins sur  $\mathcal{X}$ . C'est-à-dire qu'il existe  $c > 0$  tel que pour toute fonction  $\varphi$  dans  $\mathcal{X}$ ,

$$|\langle A\varphi, \varphi \rangle| \geq c \|\varphi\|_X^2.$$

Ainsi, la forme  $f_F$ , construite à partir des mesures, est comparable à  $\|G_n^* \Psi\|$ . En combinant la relation (1.19) et le Corollaire 1.14, le domaine  $D$  est caractérisé par la relation

$$z \in D \iff \text{il existe } c > 0 \text{ telle que } \forall \Psi \in L^2(\Gamma_e), |\langle \Psi, \Phi_1^\infty(z, \cdot) \rangle| \leq c f_F(\Psi). \quad (1.23)$$

### Méthode pratique de localisation

Puisque la fonction  $\Phi_1^\infty(z, \hat{x}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}$  est explicitement connue, cette caractérisation repose uniquement sur les mesures. Elle n'est cependant pas encore exploitable en pratique. On montre alors dans [Kirsch & Grinberg 2008, Théorème 1.23] que si l'opérateur  $F_n$  est normal, il admet aussi une factorisation de la forme

$$F_n = |F_n|^{\frac{1}{2}} E_2 |F_n|^{\frac{1}{2}}, \quad (1.24)$$

où l'opérateur  $E_2$  est encore coercif. Par conséquent,  $f_F(\Psi)$  n'est autre que  $\left\| |F_n|^{\frac{1}{2}} \Psi \right\|$  et la caractérisation (1.23) combinée au Lemme 1.13 donne

$$z \in D \iff \Phi_1^\infty(z, \cdot) \in \mathcal{R}\left(|F_n|^{\frac{1}{2}}\right). \quad (1.25)$$

Ainsi, en traduisant la caractérisation (1.25) par le critère de Picard (Lemme 1.16), on obtient une première version “simplifiée” de la Proposition 1.12. Simplifiée dans le sens où l’opérateur de mesures considéré est pour l’instant l’opérateur de champ lointain  $F_n$  classique.

**Lemme 1.16** (Critère de Picard). *[Kirsch 1996, Théorème A.51] Soit  $L : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire compact entre espaces de Hilbert ayant  $(\sigma_j, x_j, y_j)$  comme système singulier. L’équation*

$$Lx = y,$$

*est résoluble si et seulement si*

$$y \in \ker(L^*)^\perp \text{ et } \sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} |\langle y, y_j \rangle|^2 < \infty.$$

*Dans ce cas*

$$x = \sum_j \frac{1}{\sigma_j} \langle y, y_j \rangle x_j,$$

*est une solution de  $Kx = y$ .*

Dans le cas où l’opérateur de mesures  $F_n$  n’est pas normal, la dernière factorisation (1.24) n’est plus valable et il faut considérer un autre opérateur de mesures afin d’aboutir à une factorisation concluante. Ceci est notamment le cas quand les ensembles de directions de mesures/émissions ne couvrent pas toute la sphère ( $\Gamma_m \neq S^{d-1}$ ) ou dans le cas d’objets absorbants ( $\text{Im } n(x) \neq 0$ ). L’opérateur qu’il faut considérer en remplacement de  $F_n$  est présenté dans le lemme suivant.

**Lemme 1.17** (Factorisation de “ $F_\#$ ”). *[Kirsch & Grinberg 2008, Théorème 2.15] Soit  $X \subset U \subset X^*$  un triplet de Gelfand où  $U$  est un espace de Hilbert et  $X$  un espace de Banach réflexif tel que l’inclusion soit dense. De plus, soit  $Y$  un second espace de Hilbert et soient  $F : Y \rightarrow Y$ ,  $H : X \rightarrow Y$  et  $T : X^* \rightarrow X$  des opérateurs linéaires continus tels que*

$$F = HTH^*.$$

*Avec les notations  $\text{Re } L = (L + L^*)/2$ ,  $\text{Im } L = (L - L^*)/2i$  et  $|L| = (L^*L)^{\frac{1}{2}}$ , on fait les hypothèses suivantes :*

1.  *$H$  est compact d’image dense,*
2. *Il existe  $t \in [0, 2\pi]$  tel que  $\text{Re}[e^{it}T]$  soit de la forme  $\text{Re}[e^{it}T] = G + K$ , avec  $K$  un opérateur compact et  $G : X^* \rightarrow X$  un opérateur auto-adjoint coercif,*
3.  *$\text{Im } T$  est compact et positif sur  $\mathcal{R}(G^*)$ ,*
4.  *$\text{Re}[e^{it}T]$  est bijectif ou  $\text{Im } T$  est strictement positif sur  $\overline{\mathcal{R}(H^*)}$ .*

*Alors l’opérateur  $F_\# = |\text{Re}[e^{it}F]| + |\text{Im } F|$  est auto-adjoint, positif et possède une factorisation de la forme*

$$F_\# = HT_\#H^*,$$

*où l’opérateur  $T_\#$  est coercif. De plus, les images de  $H$  et  $F_\#^{\frac{1}{2}}$  coïncident.*

Le Lemme 1.17 annonce que l’opérateur  $F_{\#}$ , qui est construit à partir des mesures, a une factorisation de la forme

$$F_{\#} = G_n T_{\#} G_n^*,$$

où l’opérateur  $T_{\#}$  est coercif. De plus, l’opérateur  $F_{\#}$  est positif et auto-adjoint, ce qui lui donne une autre factorisation de la forme

$$F_{\#} = |F_{\#}|^{\frac{1}{2}} |F_{\#}|^{\frac{1}{2}}.$$

On peut alors reprendre le Lemme 1.13 pour aboutir à la conclusion (déjà incluse dans le résultat du Lemme 1.17) que les images des opérateurs  $|F_{\#}|^{\frac{1}{2}}$  et  $G_n$  coïncident.

Ainsi, on aboutit au résultat de la Proposition 1.12.

**Remarque 1.18.** *Dans tous les cas, la fonction test  $\Phi_1(z_i, \cdot)$  est l’asymptotique de la fonction de Green pour le milieu ambiant qui est homogène. L’efficacité de ces méthodes repose alors en partie sur le fait que cette fonction test est connue et facile à évaluer. Quand le milieu ambiant est inhomogène, la fonction de Green n’est plus connue et la localisation d’objet non perméables aux ondes soulève des difficultés supplémentaires [Manolis & Shaw 1997, Coyle 2000, Hyvönen et al. 2007, Nachman et al. 2007]. De plus, les factorisations utilisées dans les méthodes de “Factorization” doivent être justifiées pour chaque nouveau cadre d’application [Gebauer 2006, Kirsch 2005]. En champ proche par exemple, la méthode de “Factorization” a été adaptée au cas de la tomographie pour détecter des inclusions dans un milieu ambiant inhomogène connu [Hyvönen 2007].*



## Localisation de défauts

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème de la localisation de défauts dans des milieux in-homogènes à partir de mesures à grande distance. Les défauts désignent des perturbations ou des dégradations dans un objet par rapport à son état initial. Leur localisation est alors donnée par les lieux où l'indice de réfraction effectif est différent de l'indice de réfraction supposé.

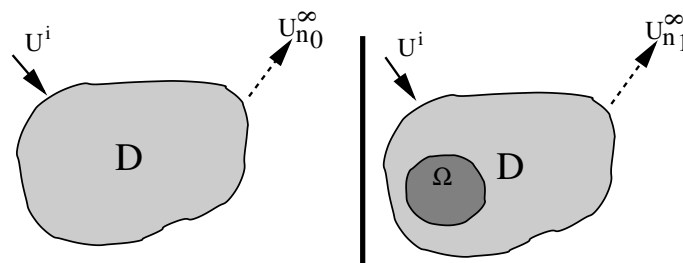


FIGURE 2.1: Objet dans son état initial (à gauche) et objet effectif (à droite).

Plus précisément, on considère un ou plusieurs objets représentés par un milieu inhomogène à support compact. Notons  $D$  ce support et  $n_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  l'indice de réfraction caractérisant ce milieu. Cet indice  $n_0$  est normalisé à la valeur 1 en dehors de  $D$ . Soit alors  $n_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  une version perturbée de  $n_0$  et on note

$$\Omega := \text{support}(n_1 - n_0), \quad (2.1)$$

le lieu des défauts comme on peut le voir sur la Figure 2.1.

Nous allons chercher à reconstruire  $\Omega$  à partir des mesures physiques données par  $u_1^\infty(\theta, \hat{x})$  et de l'indice de référence  $n_0(x)$ . Nous proposons ici une caractérisation du lieu de ces défauts ne nécessitant pas le calcul des fonctions de Green du milieu ambiant.

Pour aboutir à cette localisation, nous reprenons le principe des méthodes de “sampling”



présentées dans la partie précédente et qui se décompose en deux grandes étapes. Tout d'abord nous établissons une caractérisation du domaine recherché par l'image d'un opérateur. Ensuite, nous relient l'image de cet opérateur aux mesures. Comme dans la méthode de factorisation présentée au premier chapitre, cette étape nécessitera la factorisation d'un opérateur de mesures qui reste à définir. Cependant, cette méthode repose sur la fonction de Green du milieu ambiant. Cette fonction n'est pas connue explicitement et nous cherchons alors à localiser les endroits où l'indice de réfraction effectif diffère des valeurs connues sans avoir à calculer les fonctions de Green associées à l'objet avant l'apparition des défauts. Nous aboutissons à ce résultat sous la forme du théorème suivant :

**Théorème 2.1.** *Sous certaines hypothèses et avec un opérateur  $\widetilde{W}$  bien choisi et construit uniquement à partir des mesures, la forme  $f_{\widetilde{W}}$  définie sur  $L^2(S^{d-1})$  par*

$$f_{\widetilde{W}}(\Psi) := \left| \langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \rangle \right|^{\frac{1}{2}},$$

*permet de caractériser le lieu des défauts par la relation*

$$z \in \Omega \iff \text{il existe } c > 0 \text{ telle que } \forall \Psi \in L^2(S^{d-1}), \left| \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle \right| \leq c f_{\widetilde{W}}(\Psi),$$

*où  $u_{n_0}(\theta, z)$  est le champ total pour l'objet non perturbé avec une source de type onde plane dans la direction  $\theta$ .*

La construction de ce théorème se décompose en plusieurs étapes.

1. Dans une première partie, nous reprenons le principe de caractérisation par les fonctions de Green pour l'appliquer à notre cas. Avec les asymptotiques du potentiel volumique (1.13) et de la fonction de Green, nous démontrons l'équivalent de la relation (1.19) pour la localisation de défauts sous la forme du Théorème 2.2 qui établit la relation

$$z \in \Omega \iff \Phi_{n_0}^\infty(z, \cdot) \in \mathcal{R}(V_{n_0}^\infty \chi_\Omega).$$

La fonction de Green  $\Phi_{n_0}$  n'est pas connue explicitement, mais nous n'avons besoin que de son asymptotique. Or, même si son expression n'est plus aussi simple que pour la détection d'objets dans l'air ( $\Phi_1^\infty(z, \hat{x}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}$ ), le comportement asymptotique de la fonction de Green est égal au champ total pour le milieu ambiant et le Lemme 2.3 montre que

$$\Phi_{n_0}^\infty(z, \hat{x}) = u_{n_0}(-\hat{x}, z), \quad z \in D, \quad \hat{x} \in S^{d-1}.$$

Avec ceci nous reformulons la caractérisation du lieu des défauts en fonction du champ  $u_{n_0}$ . En définissant l'opérateur  $C : L^2(D) \rightarrow L^2(\Gamma_e)$  par

$$Cf(\theta) = \langle f, u_{n_0}(\theta, \cdot) \rangle_{L^2(D)}, \quad \theta \in \Gamma_e,$$

la caractérisation par sources ponctuelles devient dans le Corollaire 2.5

$$z \in \Omega \iff \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(C\chi_\Omega).$$

Cependant, l'opérateur  $C$  n'est pas connecté aux mesures.

2. Dans une seconde partie, nous allons donc chercher à relier l'image de cet opérateur aux mesures par le biais du Lemme 1.13 afin d'aboutir à une caractérisation du lieu des défauts à partir des mesures. Pour cela, en reprenant le principe de la méthode de "Factorization", nous allons factoriser un opérateur de mesures afin de construire une forme comparable à  $\|C^*\Psi\|$ .

Nous considérons des mesures physiques à grande distance. Pour les mêmes motivations que celles à l'origine des méthodes de "Linear sampling" ou de "Factorization", un opérateur de mesures naturel est l'opérateur de champ lointain. Comme nous cherchons à reconstruire le lieu de la différence entre deux indices, il semble naturel de considérer comme opérateur de mesures la soustraction des champs lointains correspondant respectivement à l'état des objets avant et après l'apparition d'éventuels défauts. On note cet opérateur

$$W^\infty := F_{n_1} - F_{n_0},$$

et on va chercher à le factoriser pour le mettre en relation avec  $C^*$ . On montre au Lemme 2.10 que l'opérateur  $W^\infty$  possède une factorisation de la forme

$$W^\infty = V_{n_0}^\infty \chi_\Omega A \chi_\Omega C^*,$$

où  $A$  est un automorphisme de  $L^2(\Omega)$ . On voit qu'on peut contrôler les sources, de la forme  $\chi_\Omega C^*\Psi$ , ou les images, de la forme  $V_{n_0}^\infty \chi_\Omega \Psi$ , mais pas les deux en même temps. Cette factorisation n'est pas symétrique et de ce fait, on ne peut pas directement construire de forme comparable à  $\chi_\Omega C^*$  à partir de  $W^\infty$  comme c'était le cas dans la méthode de "Factorization" pour la localisation d'objets dans un milieu homogène. Pour rendre cette factorisation symétrique et pouvoir caractériser le lieu des défauts à partir des mesures, on établit alors une relation entre les opérateurs  $V_{n_0}^\infty$  et  $C$ . Cette relation fait intervenir l'opérateur de "scattering"  $S_n : L^2(S^{d-1}) \rightarrow L^2(S^{d-1})$  défini par

$$S_n := I + 2ik |\gamma|^2 F_n,$$

et prend dans le Lemme 2.11 la forme suivante

$$V_{n_0}^\infty = S_{n_0} C.$$

Pour obtenir cette relation on s'est placé dans le cas où l'opérateur de "scattering"  $S_{n_0}$  est unitaire et alors on obtient à la Proposition 2.14 une factorisation symétrique, mais pour un nouvel opérateur de mesures :

$$\widetilde{W} := S_{n_0}^* W^\infty = C A C^*.$$

3. Finalement, en montrant que l'opérateur  $A$  est coercif, cette dernière factorisation de l'opérateur  $\widetilde{W}$  permet de conclure que la forme  $f_{\widetilde{W}}$  définie sur  $L^2(S^{d-1})$  par

$$f_{\widetilde{W}}(\Psi) := \left| \left\langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \right\rangle \right|^{\frac{1}{2}},$$

est comparable à  $\|\chi_\Omega C^*\Psi\|$ . Ainsi, par le biais du Lemme 1.13 on aboutit au résultat principal de cette partie qu'est le Théorème 2.21 :

$$z \in \Omega \iff \text{il existe } c > 0 \text{ telle que } \forall \Psi \in L^2(S^{d-1}), \left| \left\langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\rangle \right| \leq c f_{\widetilde{W}}(\Psi).$$

## 2.1 Localisation des défauts par des fonctions test

La localisation des défauts repose sur une adaptation à notre cadre d'un résultat intervenant dans de nombreuses méthodes de reconstitution de domaine : l'identification par sources ponctuelles. Les rayonnements possibles en présence des défauts sont comparés au rayonnement d'une source ayant pour support un point fixé. En chaque point de l'espace on obtient ainsi un test binaire basé sur une fonction construite autour du point testé. Il faut donc définir l'ensemble des rayonnements possibles en présence des défauts et construire un ensemble des fonctions tests adéquat.

### 2.1.1 Localisation par les fonctions de Green

Les sources ponctuelles correspondent aux fonctions de Green. La caractérisation classique qu'on construit avec les sources ponctuelles fait donc intervenir l'asymptotique des fonctions de Green.

**Théorème 2.2.** *L'asymptotique du potentiel volumique  $V_{n_0}^\infty$  (1.13) et l'asymptotique de la fonction de Green pour le milieu ambiant  $\Phi_{n_0}^\infty$  (1.9), vérifient pour tout  $z \in \mathbb{R}^3$*

$$z \in \Omega \iff \Phi_{n_0}^\infty(z, \cdot) \in \mathcal{R}(V_{n_0}^\infty \chi_\Omega).$$

**Démonstration :** Commençons par construire un antécédent à  $\Phi_{n_0}^\infty(z, \cdot)$ . Soit  $z \in \Omega$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que la boule  $B_{z,\varepsilon}$  de centre  $z$  et de rayon  $\varepsilon$  soit incluse dans  $\Omega$ . La fonction  $\Phi_{n_0}^\infty(z, y)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à la variable  $y$  sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{z\}$ . On construit alors une fonction  $f_z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$  valant  $\Phi_{n_0}^\infty(z, \cdot)$  en dehors de  $B_{z,\varepsilon}$  et 0 dans  $B_{z,\frac{\varepsilon}{2}}$  (avec un raccord  $\mathcal{C}^\infty$  dans la couronne  $B_{z,\varepsilon} \setminus B_{z,\frac{\varepsilon}{2}}$ ). En notant  $\partial_\nu$  la dérivée normale, on a alors en particulier

$$\begin{cases} f_z = \Phi_{n_0}^\infty(z, \cdot) \text{ sur } \partial\Omega, \\ \partial_\nu f_z = \partial_\nu \Phi_{n_0}^\infty(z, \cdot) \text{ sur } \partial\Omega, \\ (\Delta + k^2 n_0) f_z = 0 \text{ en dehors de } B_{z,\varepsilon}. \end{cases}$$

On va alors écrire l'équivalent d'une représentation de Green. La formule de Green appliquée à  $f_z$  et  $\Phi_{n_0}^\infty(x, \cdot)$  donne

$$\int_\Omega \left( f_z \Delta \Phi_{n_0}(x, \cdot) - \Phi_{n_0}(x, \cdot) \Delta f_z \right) = \left( \int_{\partial\Omega} f_z \partial_\nu \Phi_{n_0}(x, \cdot) - \Phi_{n_0}(x, \cdot) \partial_\nu f_z \right). \quad (2.2)$$

Par définition on a

$$\Delta_{(y)} \Phi_{n_0}(x, y) + k^2 n_0(y) \Phi_{n_0}(x, y) = -\delta_x(y). \quad (2.3)$$

En remplaçant  $f_z$  par  $\Phi_{n_0}$  dans le terme de droite de (2.2), puisqu'ils sont égaux sur le bord, et en utilisant (2.3) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left( f_z (-\delta_x - (k^2 n_0) \Phi_{n_0}(x, \cdot)) - \Phi_{n_0}(x, \cdot) \Delta f_z \right) \\ = \int_{\partial\Omega} \left( \Phi_{n_0}(z, \cdot) \partial_\nu \Phi_{n_0}(x, \cdot) - \Phi_{n_0}(x, \cdot) \partial_\nu \Phi_{n_0}(z, \cdot) \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour finir, on applique la formule de Green puis l'égalité (2.3) au terme de droite de (2.4) et on aboutit à :

$$\begin{aligned}
& -f_z(x) - \int_{\Omega} (\Delta + k^2 n_0) f_z \Phi_{n_0}(x, \cdot) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left( \Phi_{n_0}(z, \cdot) \Delta \Phi_{n_0}(x, \cdot) - \Phi_{n_0}(x, \cdot) \Delta \Phi_{n_0}(z, \cdot) \right) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left( \Phi_{n_0}(z, \cdot) (-k^2 n_0 \Phi_{n_0}(x, \cdot) - \delta_x) - \Phi_{n_0}(x, \cdot) (-k^2 n_0 \Phi_{n_0}(z, \cdot) - \delta_z) \right) \\
&= \Phi_{n_0}(z, x) - \Phi_{n_0}(x, z).
\end{aligned}$$

Par symétrie des noyaux de Green, on obtient alors

$$f_z(x) = - \int_{\Omega} (\Delta + k^2 n_0) f_z \Phi_{n_0}(\cdot, x).$$

Comme  $f_z$  vaut  $\Phi_{n_0}$  en dehors de  $\Omega$ , on peut faire tendre  $x$  vers l'infini dans l'égalité précédente qui devient alors

$$\Phi_{n_0}^{\infty}(z, \hat{x}) = f_z^{\infty}(\hat{x}) = -V_{n_0}^{\infty}[\chi_{\Omega}(\Delta + k^2 n_0) f_z](\hat{x}),$$

ce qui prouve l'implication.

Réciproquement, si  $z \notin \Omega$  et s'il existe un certain  $f_z$  tel que  $\Phi_{n_0}^{\infty}(z, \hat{x}) = V_{n_0}^{\infty} f_z(\hat{x})$ , alors le Lemme 1.2 d'unicité des champs lointains donne  $\Phi_{n_0}(z, x) = V_{n_0} f_z(x)$  pour tout  $x$  en dehors de  $\bar{\Omega} \cup \{z\}$ . Mais le terme  $V_{n_0} f_z(x)$  est continu en  $z$  alors que  $\Phi_{n_0}(z, x)$  est singulier, ce qui est contradictoire. ■

### 2.1.2 Localisation par des valeurs en champ proche

La localisation des défauts du Théorème (2.2) fait appel au comportement asymptotique de la fonction de Green associée au milieu défini par  $n_0$ . Or, cette fonction n'est pas connue analytiquement et est par ailleurs difficile à évaluer en pratique. Cependant, on montre que son comportement asymptotique s'obtient à partir du champ total  $u_{n_0}$ , que l'on sait évaluer numériquement quand  $n_0$  est connu.

**Lemme 2.3** ("Mixed reciprocity principle"). *Avec la fonction de Green pour le milieu ambiant  $\Phi_n^{\infty}$  (1.9) et le champ total  $u_n(\theta, \cdot)$ , solution du système (1.1)-(1.5) avec une source de type onde plane  $u^i(\theta, z) = e^{ikz \cdot x}$ , on a la relation suivante :*

$$\Phi_n^{\infty}(z, \hat{x}) = u_n(-\hat{x}, z), \quad z \in \mathbb{R}^d, \hat{x} \in S^{d-1}.$$

**Remarque 2.4.** *Avec la seconde convention (1.8) pour la définition du champ lointain, le résultat devient  $\Phi_n^{\infty}(z, \hat{x}) = \gamma u_n(-\hat{x}, z)$ .*

Cette relation n'est pas un résultat nouveau mais nous n'en avons pas trouvé de preuve sous la forme présentée ici dans la littérature, aussi nous en proposons une.

**Preuve du Lemme 2.3 :** Soit  $h \in \mathcal{H}_1(D)$  une fonction de Herglotz (1.17) et soit  $\varphi = V_n k^2(n-1)h$ , le potentiel volumique  $V_n$  étant défini en (1.12). Ainsi  $\varphi$  vérifie

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n)\varphi = -k^2(n-1)h, \\ \partial_r \varphi = ik\varphi + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right), \\ (\Delta + k^2)h = 0. \end{cases}$$

Ainsi on obtient  $(\Delta + k^2 n)(\varphi + h) = 0$ . La fonction  $(\varphi + h)$  est alors un champ total ayant pour source  $h$  et vérifie ainsi l'équation de Lippmann-Schwinger (1.14) :

$$(\varphi + h) = h + V_1 k^2(n-1)(\varphi + h).$$

En prenant le comportement asymptotique de chaque terme, il vient alors

$$\varphi^\infty = V_1^\infty k^2(n-1)(\varphi + h).$$

Ainsi, en utilisant l'égalité entre ondes planes et asymptotique de fonction de Green (1.11) puis la représentation intégrale pour  $u_n$  (2.7), on a

$$\begin{aligned} \varphi^\infty(\hat{x}) &= \int_{z \in D} \Phi_1^\infty(z, \hat{x}) k^2(n-1)(z)(\varphi + h)(z) \\ &= \int_{z \in D} u^i(-\hat{x}, z) k^2(n-1)(z) h(z) \\ &\quad + \iint_{z, y \in D} u^i(-\hat{x}, z) k^2(n-1)(z) \Phi_n(z, y) k^2(n-1)(y) h(y) \\ &= \int_{z \in D} u_n(-\hat{x}, z) k^2(n-1)(z) h(z). \end{aligned}$$

Comme par définition de  $\varphi$  on a aussi  $\varphi^\infty = V_n^\infty k^2(n-1)h$ , d'après le Lemme 1.9 (qui donne la densité des fonctions de Herglotz dans  $L^2(D)$ ) on a l'égalité  $\Phi_n^\infty(z, \hat{x}) = u_n(-\hat{x}, z)$  presque partout, qui est en fait une égalité en tout point par continuité des fonctions. ■

Plutôt que d'exprimer la caractérisation de  $\Omega$  avec des fonctions de Green, on reformule alors le Théorème 2.2 en fonction du champ total  $u_{n_0}$ .

**Corollaire 2.5.** Avec l'opérateur  $C : L^2(D) \rightarrow L^2(\Gamma_e)$ , défini par

$$Cf(\theta) := \langle f, u_{n_0}(\theta, \cdot) \rangle_{L^2(D)}, \quad \theta \in \Gamma_e,$$

pour tout  $z \in \mathbb{R}^d$  on a

$$z \in \Omega \iff \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(C\chi_\Omega).$$

**Démonstration :** On obtient le résultat par équivalence avec le Théorème 2.2. Cette proposition nous dit en effet que  $z \in \Omega$  équivaut à l'existence de  $g_z \in L^2(\Omega)$  tel que

$$\Phi_{n_0}^\infty(z, \hat{x}) = \langle g_z, \overline{\Phi_{n_0}^\infty(\cdot, \hat{x})} \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Avec la relation du Lemme 2.3, cela s'écrit

$$u_{n_0}(-\hat{x}, z) = \langle g_z, \overline{u_{n_0}(-\hat{x}, \cdot)} \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

La fonction  $f_z = \overline{\chi_\Omega g_z}$  vérifie donc  $Cf_z(\theta) = \overline{u_{n_0}(\theta, z)}$  et on a l'équivalence recherchée. ■

**Remarque 2.6.** Nous avons caractérisé  $\Omega$  à partir des fonctions tests  $u_{n_0}$  au lieu des solutions fondamentales. Ce type de résultat est aussi obtenu dans [Egger et al. 2010] par une approche générale où les fonctions tests sont déterminées à partir d'un problème adjoint. L'intérêt de notre démarche est double. Premièrement, on sait donc évaluer numériquement ces fonctions tests, même si l'indice de référence est inhomogène, alors que calculer la fonction de Green et en déduire son asymptotique est a priori plus compliqué. Deuxièmement, les valeurs en champ lointain pour l'indice de référence  $u_{n_0}^\infty$  sont généralement calculées à partir des valeurs du champ total  $u_{n_0}$ . Ainsi, dans la résolution pratique d'un problème inverse reposant sur les valeurs de  $u_{n_0}^\infty$  on aura généralement déjà calculé ces fonctions tests, ce qui apporte un gain en efficacité.

## 2.2 Factorisation de l'opérateur de mesures

Nous venons de voir deux opérateurs,  $V_{n_0}^\infty$  et  $C$  définis respectivement dans l'équation (1.13) et le Corollaire 2.5, dont les images caractérisent le domaine  $\Omega$ , chacun au travers d'un ensemble de fonctions tests spécifiques. Les fonctions tests du Corollaire 2.5 peuvent être calculées à partir de l'indice  $n_0$  qu'on suppose connu, mais pour l'instant on ne sait pas déterminer l'opérateur  $C\chi_\Omega$  à partir de mesures physiques.

Déterminer l'image de cet opérateur nécessite a priori la connaissance du domaine  $\Omega$  qui est précisément l'inconnue recherchée. Pour aboutir à une méthode pratique de reconstruction du domaine des défauts il faudrait donc pouvoir caractériser l'image de cet opérateur en fonction des mesures physiques. Cependant, d'après le Corollaire 1.14, il suffit de connaître une forme comparable à  $\|\chi_\Omega C^* \Psi\|$  pour caractériser l'image de l'opérateur  $C\chi_\Omega$  du Corollaire 2.5. Nous allons donc construire une forme positivement homogène à partir des mesures physiques dont on pourra montrer qu'elle est comparable à  $\|\chi_\Omega C^* \Psi\|$ .

Pour ce faire, il faut en premier lieu définir un opérateur de mesure autour duquel sera construite cette forme positivement homogène. Ensuite, pour que la comparaison soit possible, nous factorisons l'opérateur de mesures de manière à exhiber l'opérateur  $C$ .

### 2.2.1 Factorisation de la différence entre les mesures physiques avant et après perturbation

Comme pour les méthodes de “Linear Sampling” et de “Factorization”, nous reprenons le principe de sources composées de superpositions d'ondes planes qui sont les images de l'opérateur  $H$  (1.17). Ainsi, les mesures sont définies par l'opérateur de champ lointain associé à l'indice de réfraction considéré  $F_n$  (1.16). Et comme nous nous intéressons à la localisation de perturbations par rapport à un état initial nous considérons comme opérateur de mesure  $W^\infty$ , la soustraction des opérateurs de champ lointain associés respectivement aux mesures avant et après perturbation :

$$W^\infty := F_{n_1} - F_{n_0}. \quad (2.5)$$

Cet opérateur est entièrement déterminé par la connaissance des mesures en présence de défauts  $u_{n_1}^\infty$  et la connaissance, soit des mesures avant apparition de défauts  $u_{n_0}^\infty$ , soit de l'indice de réfraction initial  $n_0$  permettant de calculer les valeurs de  $u_{n_0}^\infty$ . Il reste alors à factoriser cet opérateur. Cette factorisation se déduit de formulations intégrales de type Lippmann-Schwinger des solutions du système (1.1)-(1.5).

**Lemme 2.7.** *On note  $w$  la soustraction entre les champs totaux issus de l'indice de référence ( $u_{n_0}$ ) et de l'indice effectif ( $u_{n_1}$ ) donnés par la solution au système (1.1)-(1.5) avec respectivement  $n = n_0$  et  $n = n_1$  et la même source générique  $u^i$*

$$w := u_{n_1} - u_{n_0}. \quad (2.6)$$

Avec le potentiel volumique  $V_{n_0}$  (1.12), on a pour  $u_{n_0}$ ,  $u_{n_1}$  et  $w$  les formulations intégrales suivantes

$$u_{n_0} = (I + V_{n_0}k^2(n_0 - 1)) u^i, \quad (2.7)$$

$$u_{n_1} = (I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1} (I + V_{n_0}k^2(n_0 - 1)) u^i, \quad (2.8)$$

$$w = V_{n_0}k^2(n_1 - n_0) (I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1} (I + V_{n_0}k^2(n_0 - 1)) u^i. \quad (2.9)$$

**Démonstration :** Nous démontrons les représentations par potentiel volumique (2.7) et (2.8). La représentation (2.9) s'en déduit par soustraction des deux premières. Soit  $z \in \mathbb{R}^d$  et soit  $n \in L^\infty(D)$  un indice quelconque. On commence par isoler dans l'équation de Helmholtz (1.1) le terme  $(u_n - u^i)$  qui vérifie la condition de radiation de Sommerfeld

$$0 = (\Delta + k^2n) u_n = (\Delta + k^2n_0)(u_n - u^i) + k^2(n_0 - 1)u^i + k^2(n - n_0)u_n. \quad (2.10)$$

Par ailleurs, en appliquant la formule de Green à l'intérieur de  $D$ , il vient

$$\begin{aligned} \int_D \Phi_{n_0}(z, \cdot) (\Delta + k^2n_0)(u_n - u^i) \\ = \int_D \left( (u_n - u^i) \Delta \Phi_{n_0}(z, \cdot) + \Phi_{n_0}(z, \cdot) k^2n_0(u_n - u^i) \right) \\ + \int_{\partial D} \left( (u_n - u^i) \partial_\nu \Phi_{n_0}(z, \cdot) - \Phi_{n_0}(z, \cdot) \partial_\nu (u_n - u^i) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

De plus, comme  $(u_n - u^i)$  ainsi que  $\Phi_{n_0}(z, \cdot)$  vérifient l'équation de Helmholtz (1.1) avec  $n = 1$  en dehors de  $D$  et la condition de radiation de Sommerfeld, une nouvelle application de la formule de Green mais à l'extérieur de  $D$  donne

$$\int_{\partial D} \left( (u_n - u^i) \partial_\nu \Phi_{n_0}(z, \cdot) - \Phi_{n_0}(z, \cdot) \partial_\nu (u_n - u^i) \right) = 0.$$

Ainsi, en tenant compte de l'équation (1.9) vérifiée par  $\Phi_{n_0}$ , l'égalité (2.11) devient

$$\begin{aligned} \int_D \Phi_{n_0}(z, \cdot) (\Delta + k^2n_0)(u_n - u^i) \\ = \int_D \left( (u_n - u^i) (-k^2n_0 \Phi_{n_0}(z, \cdot) - \delta_z) + \Phi_{n_0}(z, \cdot) k^2n_0(u_n - u^i) \right) \\ = -(u_n - u^i). \end{aligned} \quad (2.12)$$

En multipliant l'équation de Helmholtz (2.10) par  $\Phi_{n_0}(z, \cdot)$  et en intégrant sur  $D$ , l'égalité (2.12) permet alors d'aboutir à

$$-(u_n - u^i) + V_{n_0}k^2(n_0 - 1)u^i + V_{n_0}k^2(n - n_0)u_n = 0. \quad (2.13)$$

En prenant  $n = n_0$ , on obtient alors (2.7) et en prenant  $n = n_1$  il vient

$$u_{n_1} - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0)u_{n_1} = u^i + V_{n_0}k^2(n_0 - 1)u^i,$$

soit encore  $u_{n_1} - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0)u_{n_1} = u_{n_0}$ . Il s'en suit que l'opérateur  $(I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))$  associe le champ total  $u_{n_1}$  au champ total  $u_{n_0}$ . Avec les opérateurs de champ total  $\mathcal{T}_{n_0}$  et  $\mathcal{T}_{n_1}$  (1.15), on voit donc que l'opérateur  $(I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))$  coïncide avec le produit  $\mathcal{T}_{n_0}\mathcal{T}_{n_1}^{-1}$  sur l'ensemble des fonctions  $\mathcal{H}_{n_1}(D)$  défini en (1.2) et est par conséquent inversible. Ceci donne (2.8). ■

On voit que la représentation intégrale pour  $w$  (2.9) est le produit de trois opérateurs appliqué à la source  $u^i$ . Le premier terme,  $V_{n_0}k^2(n_1 - n_0)$ , est le potentiel volumique (1.12) restreint au support de  $(n_1 - n_0)$  qui est par définition le domaine  $\Omega$  recherché. Le troisième terme n'est autre que  $u_{n_0}$  d'après (2.7). Il reste à étudier le terme central.

**Lemme 2.8.** *Avec le potentiel volumique  $V_{n_0}$  (1.12), on a les propriétés suivantes pour l'opérateur  $(I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1}$  :*

1. *il coïncide avec  $\mathcal{T}_{n_1}\mathcal{T}_{n_0}^{-1}$ , sur  $\mathcal{H}_{n_0}(D)$  (définis respectivement en (1.15) et (1.2)),*
2. *pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  contenant  $\Omega$ , c'est un automorphisme de  $L^2(\mathcal{O})$ ,*
3. *en particulier, au sens des endomorphismes de  $L^2(D)$  on a l'égalité*

$$\chi_\Omega (I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1} = \chi_\Omega (I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1} \chi_\Omega, \quad (2.14)$$

4. *enfin, c'est un isomorphisme de  $\mathcal{H}_{n_0}(\mathcal{O})$ , dans  $\mathcal{H}_{n_1}(\mathcal{O})$ .*

**Démonstration :**

1. En reconnaissant la représentation intégrale de  $u_{n_0}$  donnée par (2.7) dans celle de  $u_{n_1}$  donnée par (2.8), on a  $\mathcal{T}_{n_1} = (I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1} \mathcal{T}_{n_0}$ . Ainsi, le produit d'opérateurs  $\mathcal{T}_{n_1}\mathcal{T}_{n_0}^{-1}$  coïncide avec l'opérateur  $(I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1}$  sur l'ensemble  $\mathcal{H}_{n_0}(D)$ .
2. Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert contenant  $\Omega$ . On montre que  $(I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))$  est un automorphisme de  $L^2(\mathcal{O})$  par le même principe que celui de la preuve de la Proposition 1.8. En effet, par le Lemme 1.5, l'opérateur  $V_{n_0}$  est compact et par l'alternative de Fredholm il suffit donc de montrer que l'opérateur  $(I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))$  est injectif sur  $L^2(\mathcal{O})$ . Soit alors  $f \in L^2(\mathcal{O})$  telle que  $f = V_{n_0}k^2(n_1 - n_0)f$ . On peut donc par cette égalité prolonger  $f$  par  $\tilde{f} := V_{n_0}k^2(n_1 - n_0)f$  à tout  $\mathbb{R}^d$ . Par définition de  $V_{n_0}$  on voit que la fonction  $\tilde{f}$  vérifie la condition de radiation de Sommerfeld (1.5) et que  $(\Delta + k^2n_0)\tilde{f} = -k^2(n_1 - n_0)\tilde{f}$ , c'est-à-dire  $(\Delta + k^2n_1)\tilde{f} = 0$ , dans tout  $\mathbb{R}^d$ . Par la formule de Green, on a donc

$$\int_{\partial D} \tilde{f} \partial_\nu \bar{\tilde{f}} = \int_D \left( -k^2 \bar{n}_1 |\tilde{f}|^2 + |\nabla \tilde{f}|^2 \right),$$



et, toujours avec l'hypothèse que les indices ont une partie imaginaire à valeurs positives, on peut appliquer le lemme de Rellich 1.7 pour conclure que  $\tilde{f}$  est nulle en dehors de  $D$ . On a alors  $\tilde{f}$  nulle partout par le principe de continuation unique 1.6.

3. En particulier, toute fonction  $h \in L^2(\mathcal{O})$  nulle dans  $\Omega$  vérifie  $V_{n_0}k^2(n_1 - n_0) = 0$ . Il suit que  $(I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))h = h$ , et par conséquent  $(I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1}h = h$ . Ainsi  $\chi_\Omega (I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1} = \chi_\Omega (I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1}\chi_\Omega$  dans  $L^2(\mathcal{O})$ .
4. Par ailleurs, on a le calcul suivant

$$(\Delta + k^2n_0) ([I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0)]f) = (\Delta + k^2n_0)f + k^2(n_1 - n_0)f = (\Delta + k^2n_1)f.$$

De ce fait, l'opérateur  $(I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))$  associe des fonctions de  $\mathcal{H}_{n_1}(\mathcal{O})$  à des fonctions de  $\mathcal{H}_{n_0}(\mathcal{O})$ .

■

On peut alors exhiber une restriction à  $\Omega$  en deux endroits dans la construction de la soustraction  $w$  (2.6) en fonction d'une source  $u^i$ . Ceci permettra d'écrire l'opérateur associé comme composé d'opérateurs définis sur  $L^2(\Omega)$  qui nous serviront dans la construction d'une forme caractérisant précisément le domaine  $\Omega$ .

**Corollaire 2.9.** *La soustraction  $w$  définie en (2.6) s'écrit comme image de la source  $u^i$  par le produit d'opérateurs suivant :*

$$w = V_{n_0}k^2(n_1 - n_0)\chi_\Omega (I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1}\chi_\Omega \mathcal{T}_{n_0}u^i.$$

**Démonstration :** C'est immédiat en reprenant les équations (2.9) et (2.14). ■

Nous disposons maintenant d'une caractérisation de  $w$  comme image de la source  $u^i$  par un produit d'opérateurs. Il ne reste alors plus qu'à considérer le comportement asymptotique de  $w$  pour avoir une factorisation de l'opérateur de mesures  $W^\infty$ .

**Lemme 2.10.** *Avec le potentiel volumique  $V_{n_0}$  (1.12) on définit un endomorphisme  $A$  de  $L^2(D)$  par*

$$A := k^2(n_1 - n_0) (I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0))^{-1}.$$

*Avec l'opérateur  $C$  défini dans le Corollaire 2.5 et l'asymptotique du potentiel volumique donnée en (1.13), l'opérateur de mesure  $W^\infty$  défini en (2.5) admet alors une factorisation de la forme*

$$W^\infty = V_{n_0}^\infty AC^*. \quad (2.15)$$

**Démonstration :** Par définition, l'opérateur de mesures  $W^\infty$  est la soustraction des opérateurs de champ lointain  $F_{n_1} - F_{n_0}$ . Pour un indice  $n$  quelconque, l'opérateur de champ lointain  $F_n$  (1.16) est le produit scalaire par le champ lointain  $u_n^\infty : F_n g(\hat{x}) = \left\langle g, \overline{u_n^\infty(\cdot, \hat{x})} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}$ . Ceci est le champ lointain associé, par le développement d'Atkinson-Wilcox (1.6), au champ diffracté  $f(x) := \left\langle g, \overline{u_n(\cdot, x) - u^i(\cdot, x)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}$ . Par une simple

permutation des intégrales (les sources ondes planes sont continues) ce champ total s'écrit aussi  $f(x) = \mathcal{T}_n h(x)$  où  $h(x) := \left\langle g, \overline{u^i(\cdot, x)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}$ . Par définition de l'opérateur de Herglotz (1.17), on a  $h(x) = Hg$  et il s'en suit que  $f = \mathcal{T}_n Hg$ . Ainsi, on a

$$F_n g = (T_n Hg)^\infty. \quad (2.16)$$

Par conséquent,  $W^\infty g$  est le comportement asymptotique de  $(T_{n_1} - T_{n_0})Hg$  et d'après le Corollaire 2.9, ceci donne

$$W^\infty = V_{n_0}^\infty k^2(n_1 - n_0) (I - V_{n_0} k^2(n_1 - n_0))^{-1} \mathcal{T}_{n_0} H. \quad (2.17)$$

Par ailleurs, on calcule l'adjoint de l'opérateur  $C$ . Soient des fonctions  $f \in L^2(D)$  et  $g \in L^2(\Gamma_e)$ . Comme les sources de type onde plane  $u^i(\hat{x}, \cdot)$  sont continues, le champ total associé  $u_n(\hat{x}, \cdot)$  l'est aussi. On peut donc permuter les intégrales dans le calcul suivant.

$$\begin{aligned} \langle Cf, g \rangle_{\Gamma_e} &= \int_{\hat{x} \in \Gamma_e} \int_{z \in D} f(z) \overline{u_{n_0}(\hat{x}, z) g(\hat{x})} \\ &= \int_{z \in D} f(z) \int_{\hat{x} \in \Gamma_e} \overline{g(\hat{x}) u_{n_0}(\hat{x}, z)}. \end{aligned}$$

Par définition de l'opérateur de champ total (1.15), on a  $u_{n_0}(\hat{x}, z) = \mathcal{T}_{n_0}[u^i(\hat{x}, \cdot)](z)$  et donc

$$C^* g(z) = \int_{\hat{x} \in \Gamma_e} g(\hat{x}) \mathcal{T}_{n_0}[u^i(\hat{x}, \cdot)](z), \quad z \in D.$$

On peut alors sortir l'opérateur  $\mathcal{T}_{n_0}$  de l'intégrale par rapport à  $\hat{x}$  et en reconnaissant l'opérateur de Herglotz (1.17) on voit que l'opérateur  $C^* : L^2(\Gamma_e) \rightarrow L^2(D)$  est défini par

$$C^* = \mathcal{T}_{n_0} H. \quad (2.18)$$

Finalement, en intégrant l'égalité (2.18) dans la factorisation (2.17) on obtient  $W^\infty = V_{n_0}^\infty k^2(n_1 - n_0) (I - V_{n_0} k^2(n_1 - n_0))^{-1} C^*$ . La factorisation (2.15) découle alors de la forme de l'opérateur  $A$ . ■

### 2.2.2 Symétrisation de la factorisation par l'opérateur de “scattering”

On a vu précédemment que les opérateurs  $V_{n_0}^\infty \chi_\Omega$  et  $C \chi_\Omega$  sont tous les deux en mesure de caractériser  $\Omega$ , respectivement dans le Théorème 2.2 et le Corollaire 2.5, mais qu'on ne peut les construire directement à partir des mesures. Il nous faut donc un moyen de relier une de ces deux caractérisations aux mesures. Pour ce faire, nous suivons le principe de la méthode de “Factorization” qui aboutit à la caractérisation (1.23) en considérant la forme  $f_{W^\infty}$  définie sur  $L^2(\Gamma_e)$  par

$$f_{W^\infty}(\Psi) := \langle W^\infty \Psi, \Psi \rangle.$$

Comme cette forme est construite à partir des mesures physiques, si elle était comparable à  $\|C^* \Psi\|$ , en vertu du Corollaire 1.14 on aurait une caractérisation du domaine  $\Omega$  en fonction des mesures.

Tout d'abord, on remarque que pour que la forme  $f_{W^\infty}$  soit définie, il faut que les ensembles de mesures et d'émissions coïncident ( $\Gamma_e = \Gamma_m$ ). Ensuite, par la factorisation (2.15) de l'opérateur  $W^\infty$  il vient

$$f_{W^\infty}(\Psi) = \langle AC^*\Psi, (V_{n_0}^\infty)^*\Psi \rangle.$$

Cette factorisation asymétrique ne permet pas encore de montrer que la forme  $f_{W^\infty}$  est comparable à  $\|C^*\Psi\|$  puisqu'on ne contrôle qu'un seul des deux termes du produit scalaire. Il nous faut alors un lien entre les opérateurs  $V_{n_0}^\infty$  et  $C$ .

Par le Lemme 2.3, qui relie l'asymptotique de la fonction de Green au champ proche issu d'une onde plane, l'opérateur  $V_{n_0}^\infty$  défini en (1.13) s'écrit aussi

$$V_{n_0}^\infty h(\hat{x}) = \left\langle h, \overline{u_{n_0}(-\hat{x}, \cdot)} \right\rangle_{L^2(D)}, \quad \hat{x} \in \Gamma_m. \quad (2.19)$$

On voit ainsi que l'opérateur  $C$  défini dans le Corollaire 2.5 diffère de  $V_{n_0}^\infty$  d'une conjugaison complexe et d'une symétrie par rapport à la direction  $\hat{x}$ .

La fonction  $v(z) := \overline{u_n(-\hat{x}, z)}$  est la solution du conjugué complexe du système d'équations (1.1)-(1.5). C'est-à-dire que pour un indice de réfraction à valeurs réelles ( $n_0(z) \in \mathbb{R}$ ), la fonction  $v$  est la solution du système

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n_0(z)) v(z) = 0, \\ v(z) = e^{-ik\hat{x} \cdot z} + v^s(z), \\ \partial_r v^s = -ikv^s + \mathcal{O}\left(|z|^{-\frac{d-1}{2}}\right). \end{cases}$$

La source est donc une onde plane de direction  $-\hat{x}$  et la condition de radiation de Sommerfeld est inversée.

Ceci est le principe d'un retournement temporel [Hazard & Ramdani 2004]. Dans la méthode du retournement temporel, les ondes mesurées sont utilisées ensuite comme sources, c'est-à-dire renvoyées comme par un miroir [Fink & Prada 2001]. On considère donc l'inverse de la direction de mesure comme direction d'émission et on considère les solutions pour des temps négatifs. Cependant, le temps n'est pas présent dans nos équations et c'est la condition de rayonnement  $\partial_r u^s = ik u^s + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right)$  qui définit le sens du temps. Considérer les temps négatifs revient alors à prendre la condition de rayonnement conjuguée  $\partial_r u^s = -ik u^s + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right)$  [Morel 2005]. Le retournement temporel d'une onde est ainsi défini comme sa conjuguée, émise dans la direction opposée (le but est de focaliser sur la source ponctuelle à l'origine de ce qui a été mesuré).

Or, [Nachman *et al.* 2007] a présenté une relation entre les champs entrants et sortants faisant intervenir l'opérateur de "scattering". Cet opérateur associe dans [Kato 1995, Section 10.3] le champ lointain d'une onde sortante au champ lointain de son équivalent entrant. C'est-à-dire que pour un même milieu, l'opérateur de "scattering" associe la solution de l'équation de Helmholtz avec la condition de radiation de Sommerfeld à la solution avec la condition de radiation conjuguée. Nous allons donc établir un lien entre les opérateurs  $V_{n_0}^\infty$  et  $C$  par un lien entre leurs noyaux respectifs  $\overline{u_n(-\hat{x}, \cdot)}$  et  $u_n(\hat{x}, \cdot)$  qui fera intervenir l'opérateur de "scattering".

**Lemme 2.11.** *On suppose maintenant que les indices sont à valeurs réelles ( $n_0, n_1 \in \mathbb{R}$ ) et que les émissions ainsi que les mesures sont prises sur l'ensemble de la sphère unité ( $\Gamma_m = \Gamma_e = S^{d-1}$ ). Soit  $S_n : L^2(S^{d-1}) \rightarrow L^2(S^{d-1})$  l'opérateur de “scattering” défini par*

$$S_n := I + 2ik |\gamma|^2 F_n.$$

*Les opérateurs  $V_{n_0}^\infty$  et  $C$ , définis respectivement dans l'équation (1.13) et le Corollaire 2.5, sont alors reliés par*

$$V_{n_0}^\infty = S_{n_0} C.$$

**Remarque 2.12.** *Avec la seconde convention (1.8) pour la définition du champ lointain, l'opérateur de “scattering” est défini par  $S_n := I + 2ik\bar{\gamma}F_n$  et le résultat devient  $V_{n_0}^\infty = \gamma S_{n_0} C$ .*

**Preuve du Lemme 2.11 :** Soient  $\theta \in \Gamma_e$ . L'opérateur  $C$  est le produit scalaire par  $u_{n_0}(\theta, \cdot)$ , c'est-à-dire  $\mathcal{T}_{n_0}[u^i(\theta, \cdot)]$  :

$$Cf(\theta) = \langle f, \mathcal{T}_{n_0}[u^i(\theta, \cdot)] \rangle = \left\langle \overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(\theta, \cdot)]}, \bar{f} \right\rangle, \quad \theta \in \Gamma_e. \quad (2.20)$$

L'opérateur  $V_{n_0}^\infty$  quant à lui, est le produit scalaire par  $\overline{\Phi_{n_0}^\infty(\cdot, \theta)}$ , qui est égal d'après le Lemme 2.3 à  $\overline{u_{n_0}(-\theta, \cdot)}$ , c'est-à-dire  $\overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(-\theta, \cdot)]}$  par définition de  $\mathcal{T}_{n_0}$  (1.15). En conclusion on a

$$V_{n_0}^\infty h(\theta) = \left\langle h, \overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(-\theta, \cdot)]} \right\rangle = \left\langle \mathcal{T}_{n_0}[u^i(-\theta, \cdot)], \bar{h} \right\rangle, \quad \hat{x} \in \Gamma_m. \quad (2.21)$$

Comme on suppose l'indice  $n_0$  à valeurs réelles, en reprenant la formulation intégrale (2.7), on a alors une expression de la différence entre (le conjugué de) ces deux noyaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n_0}[u^i(-\theta, \cdot)](z) - \overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(\theta, \cdot)](z)} \\ = \int_{y \in \mathbb{R}^d} (\Phi_{n_0}(y, z) - \overline{\Phi_{n_0}(y, z)}) k^2 (n_0(y) - 1) u^i(-\theta, y). \end{aligned} \quad (2.22)$$

On est alors amené à calculer la partie imaginaire de la fonction de Green.

Pour  $y, z \in \mathbb{R}^d$  et  $R$  tel que la boule  $B_R$  de rayon  $R$  contienne  $y$  et  $z$ , en utilisant l'équation (1.9) vérifiée par  $\Phi_{n_0}(y, x)$  puis la formule de Green, on a

$$\begin{aligned} & \Phi_{n_0}(y, z) - \overline{\Phi_{n_0}(y, z)} \\ &= - \int_{x \in B_R} \left( \Phi_{n_0}(y, x) (\Delta + k^2 n_0(x)) \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} - \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} (\Delta + k^2 n_0(x)) \Phi_{n_0}(y, x) \right) \\ &= - \int_{x \in B_R} \left( \Phi_{n_0}(y, x) (k^2 n_0(x)) \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} - \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} (k^2 n_0(x)) \Phi_{n_0}(y, x) \right) \\ &\quad + \int_{x \in B_R} \left( \nabla \Phi_{n_0}(y, x) \nabla \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} - \nabla \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} \nabla \Phi_{n_0}(y, x) \right) \\ &\quad - \int_{x \in S_R} \left( \Phi_{n_0}(y, x) \partial_\nu \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} - \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} \partial_\nu \Phi_{n_0}(y, x) \right), \end{aligned}$$

ce qui se résume à

$$\Phi_{n_0}(y, z) - \overline{\Phi_{n_0}(y, z)} = - \int_{x \in S_R} \left( \Phi_{n_0}(y, x) \partial_\nu \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} - \overline{\Phi_{n_0}(z, x)} \partial_\nu \Phi_{n_0}(y, x) \right). \quad (2.23)$$

Par définition du comportement asymptotique de la fonction de Green  $\Phi_{n_0}(z, x)$  (1.10) on a

$$\Phi_{n_0}(\cdot, x) = \gamma \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} \Phi_{n_0}^\infty(\cdot, \hat{x}) + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right), \quad \text{avec } \hat{x} := \frac{x}{|x|},$$

et donc

$$\partial_\nu \Phi_{n_0}(\cdot, x) = ik \Phi_{n_0}(\cdot, x) + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right) = ik \gamma \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} \Phi_{n_0}^\infty(\cdot, \hat{x}) + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right).$$

En faisant tendre  $R$  vers l'infini dans (2.23) et en écrivant l'intégrale sur la sphère unité, on trouve alors

$$\Phi_{n_0}(y, z) - \overline{\Phi_{n_0}(y, z)} = 2ik |\gamma|^2 \int_{\hat{x} \in S^{d-1}} \Phi_{n_0}^\infty(y, \hat{x}) \overline{\Phi_{n_0}^\infty(z, \hat{x})}.$$

Ainsi, en intégrant ce résultant dans (2.22), avec l'opérateur  $V_{n_0}^\infty$  (1.13) on peut écrire

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{n_0}[u^i(-\theta, \cdot)](z) - \overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(\theta, \cdot)](z)} \\ &= 2ik |\gamma|^2 \int \int_{\substack{y \in \mathbb{R}^d, \\ \hat{x} \in S^{d-1}}} \Phi_{n_0}^\infty(y, \hat{x}) \overline{\Phi_{n_0}^\infty(z, \hat{x})} k^2 (n_0(y) - 1) u^i(-\theta, y) \\ &= 2ik |\gamma|^2 \int_{\hat{x} \in S^{d-1}} \overline{\Phi_{n_0}^\infty(z, \hat{x})} V_{n_0}^\infty[k^2 (n_0 - 1) u^i(-\theta, \cdot)](\hat{x}). \end{aligned}$$

On applique alors le principe de réciprocité du Lemme 1.3 pour avoir

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{n_0}[u^i(-\theta, \cdot)](z) - \overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(\theta, \cdot)](z)} \\ &= 2ik |\gamma|^2 \int_{\hat{x} \in S^{d-1}} \overline{\Phi_{n_0}^\infty(z, \hat{x})} V_{n_0}^\infty[k^2 (n_0 - 1) u^i(-\hat{x}, \cdot)](\theta) \\ &= 2ik |\gamma|^2 V_{n_0}^\infty \left[ k^2 (n_0 - 1) \int_{\hat{x} \in S^{d-1}} \overline{\Phi_{n_0}^\infty(z, \hat{x})} u^i(-\hat{x}, \cdot) \right](\theta). \end{aligned} \quad (2.24)$$

On effectue maintenant le changement de variable sur la sphère unité  $\hat{x} \mapsto -\hat{x}$ . Ceci fait apparaître la fonction  $\Phi_{n_0}^\infty(z, -\hat{x})$  et par l'égalité du Lemme 2.3 entre le comportement asymptotique de la fonction de Green et le champ total il vient  $\Phi_{n_0}^\infty(z, -\hat{x}) = u_{n_0}(\hat{x}, z) = \mathcal{T}_{n_0}[u^i(\hat{x}, \cdot)](z)$ . Par ailleurs, en remplaçant  $\hat{x}$  par  $-\hat{x}$  dans (2.24), on fait aussi apparaître le terme  $u^i(\hat{x}, \cdot)$  et en reconnaissant l'opérateur de Herglotz défini en (1.17), ceci devient

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{n_0}[u^i(-\theta, \cdot)](z) - \overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(\theta, \cdot)](z)} \\ &= 2ik |\gamma|^2 V_{n_0}^\infty \left[ k^2 (n_0 - 1) \int_{\hat{x} \in S^{d-1}} \overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(\hat{x}, \cdot)](z)} u^i(\hat{x}, \cdot) \right](\theta) \\ &= 2ik |\gamma|^2 V_{n_0}^\infty [k^2 (n_0 - 1) H \varphi_z](\theta), \end{aligned}$$

où  $\varphi_z(\hat{x}) := \overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(\hat{x}, \cdot)](z)}$ .

Or, par la représentation intégrale (2.7) et la définition de  $V_{n_0}^\infty$  (1.13), l'opérateur  $V_{n_0}^\infty k^2(n_0 - 1)$  est une représentation intégrale du champ lointain associé au champ total  $u_{n_0}$ . Comme on a vu en (2.16) que  $F_{n_0}$  est le champ lointain associé au champ total  $u_{n_0}$  pour une source de la forme  $u^i = Hg$ , il vient

$$V_{n_0}^\infty (k^2(n_0 - 1)H) = F_{n_0},$$

et alors on obtient

$$\mathcal{T}_{n_0}[u^i(-\theta, \cdot)](z) - \overline{\mathcal{T}_{n_0}[u^i(\theta, \cdot)](z)} = 2ik |\gamma|^2 F_{n_0} \varphi_z(\theta).$$

Cette égalité s'écrit aussi

$$\mathcal{T}_{n_0}[u^i(-\theta, \cdot)](z) = \left( I + 2ik |\gamma|^2 F_{n_0} \right) \varphi_z(\theta).$$

En reprenant les écritures des opérateurs  $C$  et  $V_{n_0}^\infty$ , respectivement (2.20) et (2.21), on voit alors en sortant l'opérateur  $\left( I + 2ik |\gamma|^2 F_{n_0} \right)$  du produit scalaire que

$$V_{n_0}^\infty = \left( I + 2ik |\gamma|^2 F_{n_0} \right) C.$$

■

**Remarque 2.13.** L'opérateur de "scattering"  $S_{n_0}$  reste défini pour  $n_0$  à valeurs complexes. On est alors tenté d'étendre la relation du Lemme 2.11. Mais les formulations (2.20) et (2.21) montrent qu'on a besoin d'opérateur transformant une solution pour l'équation de Helmholtz en sa conjuguée. Or, l'opérateur de "scattering" transforme une onde sortante en une onde entrante (voir [Kato 1995, Section 10.3] et [Morel 2005]), et cette transformation ne coïncide avec la conjugaison que dans le cas d'indices réels. En effet, soit  $u_n$  vérifiant (1.1)-(1.5). Sa conjuguée  $\overline{u_n}$  vérifie bien la condition de radiation conjuguée et en conjuguant les autres équation (1.1)-(1.4) on voit que la source engendrant  $\overline{u_n}$  est bien  $\overline{u^i(\theta, \cdot)} := u^i(-\theta, \cdot)$ . Cependant, si l'indice n'est pas réel, c'est-à-dire si l'objet est absorbant, l'équation (1.1) n'est pas stable par conjugaison et l'onde conjuguée  $\overline{u_n}$  ne correspond alors plus au même milieu : ce n'est plus l'onde entrante associée à l'onde sortante  $u_n$ . Il est donc peu probable que l'opérateur de "scattering", tel que nous l'avons utilisé, puisse relier  $V_{n_0}^\infty$  et  $C$  dans le cas d'indices complexes.

Nous pouvons maintenant écrire une factorisation symétrique d'un opérateur qui n'est pas simplement la soustraction des champs lointains  $W^\infty$ , mais qui reste construit à partir des mesures physiques.

**Proposition 2.14.** Sous les hypothèses du lemme 2.11, l'opérateur  $\widetilde{W} : L^2(S^{d-1}) \rightarrow L^2(S^{d-1})$  défini par

$$\widetilde{W} := S_{n_0}^* W^\infty,$$

possède une factorisation de la forme

$$\widetilde{W} = CAC^*.$$

**Démonstration :** Le Lemme 2.10 donne la factorisation  $W^\infty = V_{n_0}^\infty AC^*$ . Le Lemme 2.11 donne alors  $W^\infty = S_{n_0} CAC^*$ . Sous les hypothèses du lemme 2.11, on sait que l'opérateur de "scattering"  $S_{n_0}$  est unitaire [Kirsch & Grinberg 2008, Théorème 4.4] et le résultat s'en suit. ■

## 2.3 Localisation des défauts par les mesures

Nous avons vu que le Corollaire 2.5 permet de caractériser le support des défauts par des fonctions tests et l'image de l'opérateur  $C^*$ . Le Corollaire 1.14 montre ensuite qu'on peut caractériser cette image par toute forme comparable à  $\|\chi_\Omega C^* \Psi\|$ . Par ailleurs, nous avons maintenant une factorisation faisant intervenir  $C$  de manière symétrique pour un opérateur  $\widetilde{W}$  qui n'est plus la soustraction des champs lointains, mais reste construit à partir des mesures. Nous considérons donc la forme  $f_{\widetilde{W}} : L^2(S^{d-1}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  construite à partir des mesures et définie par

$$f_{\widetilde{W}}(\Psi) := \left| \left\langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \right\rangle_{L^2(S^{d-1})} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad (2.25)$$

à partir de laquelle nous allons pouvoir caractériser le support des défauts.

Cette caractérisation, basée sur le Corollaire 1.14, nécessite que la forme considérée soit comparable à  $\|\chi_\Omega C^* \Psi\|$ . On veut donc qu'il existe des constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que

$$c_1 \|\chi_\Omega C^* \Psi\| \leq f_{\widetilde{W}}(\Psi) \leq c_2 \|\chi_\Omega C^* \Psi\|, \quad \Psi \in L^2(S^{d-1}).$$

### 2.3.1 Majoration par continuité

La majoration découle directement de la factorisation de  $\widetilde{W}$ .

**Lemme 2.15.** *On suppose que les ensembles de directions de mesures et d'émissions couvrent la sphère unité ( $\Gamma_e = \Gamma_m = S^{d-1}$ ) et que les indices sont à valeurs réelles. Avec l'opérateur de mesures  $\widetilde{W}$  de la Proposition 2.14, la forme  $f_{\widetilde{W}}$  définie en (2.25) et l'opérateur  $C$  défini dans le Corollaire 2.5 on a la majoration suivante : il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $\Psi \in L^2(\Gamma_e)$ ,*

$$f_{\widetilde{W}} \leq c \|\chi_\Omega C^* \Psi\|. \quad (2.26)$$

**Démonstration :** Par la factorisation 2.14, on a  $f_{\widetilde{W}}(\Psi) = |\langle AC^* \Psi, C^* \Psi \rangle|^{\frac{1}{2}}$ . Or, l'opérateur  $A$  est défini dans le Lemme 2.10 par  $A := k^2(n_1 - n_0) (I - V_{n_0} K^2(n_1 - n_0))^{-1}$ . Comme le facteur  $k^2(n_1 - n_0)$  induit une restriction à  $\Omega$ , on voit par l'égalité (2.14) que  $A = \chi_\Omega A \chi_\Omega$  et que donc

$$f_{\widetilde{W}}(\Psi) = \left| \langle A \chi_\Omega C^* \Psi, \chi_\Omega C^* \Psi \rangle_{L^2(D)} \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (2.27)$$

La majoration suit alors par continuité de l'opérateur  $A$  (voir Lemme 2.8). ■

### 2.3.2 Minoration par coercivité

On voit dans l'égalité (2.27), que la minoration de  $f_{\widetilde{W}}$  par  $\|\chi_{\Omega} C^* \Psi\|$  est précisément une propriété de coercivité de l'opérateur  $A$ , au moins sur l'image de  $C^*$ . Cette propriété n'est pas triviale et sera le résultat de l'application du Lemme 1.15. Nous allons donc vérifier les hypothèses de ce lemme afin de conclure à la coercivité de l'opérateur  $A$ , entraînant l'encadrement souhaité de la forme  $f_{\widetilde{W}}$ .

#### Hypothèses physiques sur l'objet et les perturbations

La propriété de coercivité qu'on recherche nécessitera des hypothèses physiques sur les défauts dont on essaie de reconstruire la forme. En particulier, la justification repose sur une hypothèse de contraste pour les défauts (par rapport au milieu ambiant) permettant de les distinguer clairement.

**Hypothèse 2.16** (de contraste). *On suppose que les indices  $n_0$  et  $n_1$  sont à valeurs réelles et que  $(n_1 - n_0)$ , ou bien  $(n_0 - n_1)$ , est localement borné inférieurement, i.e. :*

- *pour tout compact  $\omega$  de  $\Omega$  il existe  $c > 0$  telle que  $(n_1(z) - n_0(z)) \geq c$  pour presque tout  $z \in \omega$ ,*
- ou bien*
- *pour tout compact  $\omega$  de  $\Omega$  il existe  $c > 0$  telle que  $(n_1(z) - n_0(z)) \leq -c$  pour presque tout  $z \in \omega$ .*

**Remarque 2.17.** *En faisant cette hypothèse, on demande à la différence des indices d'être signée. Que  $n_1$  soit supérieur à  $n_0$  ou l'inverse ne change rien, mais il ne faut pas que l'ordre s'inverse dans  $\Omega$ .*

De plus, pour un nombre d'onde  $k$  fixé (i.e. une fréquence donnée), certaines géométries ne sont pas détectables. Nous ne pourrions donc formuler de résultat de localisation des défauts à partir des mesures qu'à l'exception de certaines géométries ou de certaines longueurs d'ondes. Ce lien entre géométries identifiables et nombre d'onde est représenté par le concept de valeur propre de transmission. Quand on considère l'équation de Helmholtz pour un milieu inhomogène, l'application qui à une source fait correspondre le champ lointain n'est plus injective. En effet, dans ce cas le champ diffracté  $u^s := (u_n - u^i)$  vérifie l'équation

$$(\Delta + k^2 n) u^s = -k^2 (n - 1) u^i.$$

Si le champ lointain est nul, l'unicité du champ lointain du Lemme 1.2 et le principe de continuation unique du Lemme 1.6 donnent alors le champ diffracté nul en dehors du support du second membre  $-k^2 (n - 1) u^i$ , mais on ne peut rien dire à l'intérieur. C'est ainsi que, comme dans [Kirsch 1999], apparaît le problème de transmission intérieur suivant.



**Définition 2.18.** On appelle  $k^2$  “valeur propre de transmission pour la paire d’indices  $(n_0, n_1)$ ” s’il existe un couple source-solution  $(h, u) \in (L^2(\Omega))^2$  non nul tel que

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n_0)u = -k^2(n_1 - n_0)h & \text{dans } \Omega, \\ (\Delta + k^2 n_1)h = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme on voudra par la suite éviter ce cas “pathologique”, il faut savoir quand il se rencontre. La proposition suivante dit qu’en fait cette situation est rare.

**Proposition 2.19.** Si les indices  $n_0$  et  $n_1$  sont réels, alors  $k^2$  n’est “valeur propre de transmission (pour  $n_0$  et  $n_1$ )” que pour un ensemble discret de valeurs (de  $k$ ). S’il y en a une infinité, le seul point d’accumulation possible est  $+\infty$ .

**Démonstration :** La preuve suit exactement celles de [Kirsch & Grinberg 2008, Théorèmes 4.13 et 4.14], en adaptant les notations. ■

### Validation de la coercivité

Nous sommes maintenant en mesure de justifier les hypothèses nécessaires au Lemme 1.15 qui va prouver la coercivité de l’opérateur  $A$  intervenant dans la factorisation du Lemme 2.10.

**Lemme 2.20.** L’opérateur  $A$  défini dans le Lemme 2.10 est de la forme  $A = A_0 + K$  où  $K$  est un opérateur compact. Avec l’hypothèse de contraste 2.16, alors  $A_0$  est coercif et vérifie  $\langle A_0\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}_+$  ou bien  $\langle A_0\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}_-$ , selon qu’on soit dans le cas  $(n_1 - n_0) \geq 0$  ou bien  $(n_1 - n_0) \leq 0$ . Par ailleurs,  $\text{Im } \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0$ .

Si de plus  $k^2$  n’est pas valeur propre de transmission au sens de la définition 2.18, alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{R}(C^*)$  on a

$$\text{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle = 0 \implies \varphi|_\Omega = 0.$$

**Démonstration :** Soit  $\varphi \in \mathcal{R}(C^*)$ . Par la caractérisation (2.18) de  $C^*$ , c’est donc un champ total pour l’indice  $n_0$  et une certaine source  $u^i \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^d)$ , l’espace  $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^d)$  étant défini en (1.2). Notons alors  $u_{n_0} = \varphi$ . Soit ensuite  $u_{n_1}$  le champ total pour l’indice  $n_1$  ayant la même source  $u^i$  que  $u_{n_0}$ . D’après le premier point du Lemme 2.8 on a

$$A\varphi = k^2(n_1 - n_0)\mathcal{T}_{n_1}\mathcal{T}_{n_0}^{-1}u_{n_0} = k^2(n_1 - n_0)u_{n_1}.$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, \varphi \rangle &= \int_\Omega k^2(n_1 - n_0)|u_{n_0}|^2 + \int_\Omega k^2(n_1 - n_0)(u_{n_1} - u_{n_0})\overline{u_{n_0}} \\ &= \langle A_0\varphi, \varphi \rangle + \langle K\varphi, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

avec  $A_0 = k^2(n_1 - n_0)I$  et  $K = k^2(n_1 - n_0)(\mathcal{T}_{n_1}\mathcal{T}_{n_0}^{-1} - I)$ . L'hypothèse 2.16 donne alors la coercivité de  $A_0$  ainsi que le signe de  $\langle A_0\varphi, \varphi \rangle$  en fonction du cas considéré.

De plus,  $(\mathcal{T}_{n_1}\mathcal{T}_{n_0}^{-1} - I) = \mathcal{T}_{n_1}\mathcal{T}_{n_0}^{-1}(I - \mathcal{T}_{n_0}\mathcal{T}_{n_1}^{-1})$ . La correspondance entre  $\mathcal{T}_{n_0}\mathcal{T}_{n_1}^{-1}$  et  $I - V_{n_0}k^2(n_1 - n_0)$  du Lemme 2.8 donne alors  $K = k^2(n_1 - n_0)\mathcal{T}_{n_1}\mathcal{T}_{n_0}^{-1}V_{n_0}(n_1 - n_0)$  sur  $\mathcal{R}(C^*)$ . Par compacité de  $V_{n_0}$  et continuité des autres opérateurs on conclut alors à la compacité de  $K$ .

Par ailleurs, pour  $R > 0$  tel que la boule  $B_R$  de rayon  $R$  contienne  $\Omega$  on a

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} k^2(n_1 - n_0)u_{n_1}(\overline{u_{n_1} - u_{n_0}}) &= \int_{B_R} (\Delta + k^2n_0)(u_{n_1} - u_{n_0})(\overline{u_{n_1} - u_{n_0}}) \\ &= \int_{B_R} \left( k^2n_0|u_{n_1} - u_{n_0}|^2 - |\nabla(u_{n_1} - u_{n_0})|^2 \right) + \int_{S_R} (\overline{u_{n_1} - u_{n_0}})\partial_{\nu}(u_{n_1} - u_{n_0}) \end{aligned}$$

En faisant ensuite tendre  $R$  vers l'infini, ceci devient

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} k^2(n_1 - n_0)u_{n_1}(\overline{u_{n_1} - u_{n_0}}) \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \left( (k^2n_0)|u_{n_1} - u_{n_0}|^2 - |\nabla(u_{n_1} - u_{n_0})|^2 \right) + ik|\gamma|^2 \int_{S^{d-1}} |u_{n_1}^{\infty} - u_{n_0}^{\infty}|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant la partie imaginaire, on obtient

$$\operatorname{Im} \int_{\Omega} k^2(n_1 - n_0)u_{n_1}\overline{u_{n_0}} = k|\gamma|^2 \int_{S^{d-1}} |u_{n_1}^{\infty} - u_{n_0}^{\infty}|^2.$$

De cette égalité on déduit que

$$\operatorname{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

Si on suppose cette quantité nulle, on obtient donc  $u_{n_1}^{\infty} = u_{n_0}^{\infty}$ . Le Lemme 1.6 du principe de continuation unique donne alors  $w := u_{n_1} - u_{n_0}$  nulle en dehors de  $\Omega$ . On a donc  $w := u_{n_1} - u_{n_0}$  nulle en dehors de  $\Omega$  et qui vérifie  $(\Delta + k^2n_0)w = f$  avec  $f = -k^2(n_1 - n_0)u_{n_1}$  de support inclus dans  $\Omega$ . Si  $k^2$  n'est pas valeur propre de transmission, alors  $w = 0$  partout et donc  $f = (\Delta + k^2n_0)w = 0$ . Comme  $A\varphi = k^2(n_1 - n_0)u_{n_1} = -f = 0$ , le Lemme 2.8 donne alors  $\varphi = 0$  dans  $\Omega$ . ■

### 2.3.3 Encadrement de la forme étudiée permettant la localisation des défauts

En regroupant la majoration par continuité et la minoration par coercivité, nous pouvons alors conclure le résultat principal de cette partie qui est la caractérisation du lieu des défauts au travers des mesures.

**Théorème 2.21.** *Avec l'hypothèse de contraste 2.16, si  $k^2$  n'est pas valeur propre de transmission pour les indices  $n_0$  et  $n_1$  et si  $\Gamma_m = \Gamma_e = S^{d-1}$ , alors pour tout point  $z \in \mathbb{R}^d$  on a pour la forme  $f_{\widetilde{W}}$  (2.25) l'équivalence suivante*

$$z \in \Omega \iff \exists c > 0 / \forall \Psi \in L^2(S^{d-1}), \quad \left| \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle \right| \leq cf_{\widetilde{W}}(\Psi).$$

**Démonstration :** On a vu en (2.26) que la forme  $f_{\widetilde{W}}$  est majorée par  $\|C^*\Psi\|$ .

On applique ensuite le Lemme 1.15 à l'opérateur  $A$  ou à l'opérateur  $-A$ , selon que ce soit  $(n_1 - n_0)$  ou bien  $(n_0 - n_1)$  qui est localement borné inférieurement pour vérifier l'hypothèse de contraste 2.16. En effet, en prenant la fermeture de  $\mathcal{R}(C^*)$  comme fermé  $\mathcal{X}$ , les conditions nécessaires à l'application du Lemme 1.15 sont ainsi justifiées dans le Lemme 2.20 sur  $\mathcal{R}(C^*)$  et s'étendent à la fermeture de  $\mathcal{R}(C^*)$  par continuité.

Dans les deux cas, on obtient indifféremment  $A$  coercif et l'égalité (2.27) donne alors la minoration de  $f_{\widetilde{W}}$  par  $\|C^*\Psi\|$ .

Ainsi, la forme  $f_{\widetilde{W}}$  est encadrée par  $\|C^*\Psi\|$  et par le Corollaire 1.14, pour toute fonction  $\varphi \in L^2(S^{d-1})$ ,

$$\varphi \in \mathcal{R}(C\chi_\Omega) \iff \exists c > 0 / \forall \Psi \in L^2(S^{d-1}), |\langle \Psi, \varphi \rangle| \leq cf_{\widetilde{W}}(\Psi).$$

La caractérisation du domaine  $\Omega$  par des fonctions tests du Corollaire 2.5 permet alors de conclure. ■

**Remarque 2.22.** L'hypothèse 2.16 d'un certain contraste entre les défauts et le milieu ambiant peut sembler naturelle d'un point de vue pratique. En effet, si les défauts ne sont pas contrastés, l'intuition dit qu'on pourra peut-être les voir mais sans bien cerner leurs contours. De plus, cette hypothèse est aussi naturelle d'un point de vue mathématique. Sans l'hypothèse de contraste, l'opérateur  $A$  n'est pas prouvé coercif et s'il ne l'est pas, on n'a pas la minoration de  $f_{\widetilde{W}}$ . On voit alors qu'on ne peut plus écrire l'équivalence du Théorème 2.21 mais seulement l'implication permettant de conclure que pour certaines fonctions tests  $u_{n_0}(\cdot, z)$ , alors  $z \in \Omega$ . Ce qui revient à voir une certaine partie des défauts mais sans bien cerner leurs contours.

---

## Méthodes de reconstruction du support des défauts

---

Nous avons établi par le Théorème 2.21 une caractérisation du support  $\Omega$  de défauts, défini en (2.1), à partir de mesures physiques. Cette caractérisation prend la forme d’une inégalité fonctionnelle. Il reste à la mettre en pratique en proposant un algorithme numérique de visualisation du support de ces défauts. Tout d’abord, on montre que l’inégalité fonctionnelle du Théorème 2.21 peut être reformulée comme un problème de minimisation sous contrainte. Cette caractérisation du domaine recherché généralise le “critère de l’inf” initialement introduit dans [Kirsch 2000] et prend alors la forme suivante : en chaque point  $z \in \mathbb{R}^d$ , on calcule la valeur

$$I(z) := \inf \left\{ f_{\widetilde{W}}(\Psi), \quad \Psi \in L^2(S^{d-1}) \text{ avec } \left\langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\rangle = 1 \right\},$$

où  $f_{\widetilde{W}}$  est donnée par (2.25), et si cette valeur est non nulle, le point testé est intérieur à  $\Omega$

$$z \in \Omega \iff I(z) > 0.$$

Nous allons donc étudier le calcul pratique de la valeur  $I(z)$  par deux approches distinctes : l’optimisation par méthodes itératives et la résolution explicite directe pour des cas particuliers. Nous proposons ensuite une conjecture pour étendre les résolutions explicites au cas général et étudions numériquement le comportement des méthodes directes qui en découlent sur un exemple complexe.

En Section 3.1, nous allons mettre en oeuvre des méthodes d’optimisation itératives classiques. En effet, la fonctionnelle  $f_{\widetilde{W}}$  qu’on minimise est relativement simple à évaluer mais surtout on voit que l’espace des contraintes est un hyperplan affine sur lequel on sait projeter. On peut alors trouver un minimiseur avec un algorithme de descente appliqué à la fonctionnelle  $f_{\widetilde{W}}$  composée par le projecteur sur l’espace des contraintes.

Par ailleurs, quand la projection est facile à calculer, on obtient généralement de bons

---

résultats avec un algorithme de gradient projeté. Cette méthode se présente comme une méthode de plus grande pente classique appliquée directement à la fonctionnelle  $f_{\widetilde{W}}$ , mais en projetant ensuite à chaque itération le point obtenu sur l'espace des contraintes. On obtient avec chaque algorithme une visualisation du support des défauts dans un cas simple. Cependant, ces deux méthodes souffrent d'un lourd temps de calcul dû à leur nature itérative.

En Section 3.2, on fait alors appel au Lemme 1.17 issu de la méthode de “Factorization” pour construire un opérateur défini positif et auto-adjoint  $W_{\#}$  à partir de notre opérateur de mesures  $\widetilde{W}$  défini par

$$W_{\#} = \left| \widetilde{W} + \widetilde{W}^{\star} \right| + \left| \widetilde{W} - \widetilde{W}^{\star} \right|,$$

la notation “valeur absolue” pour un opérateur  $L$  étant définie par  $|L| = (L^{\star}L)^{\frac{1}{2}}$ . Nous construisons alors une solution explicite au problème de minimisation et ceci donne lieu à une méthode directe de reconstruction du support des défauts :

$$z \in \Omega \iff \mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}(z) := \left\| W^{\dagger} u_{n_0}(\cdot, z) \right\|^{-2} > 0,$$

où  $W^{\dagger}$  est un pseudo-inverse de la racine carrée de l'opérateur  $W_{\#}$ . Cette seconde méthode caractérise donc directement les défauts par le noyau d'un opérateur.

Par ailleurs, une fois l'opérateur  $W_{\#}$  construit et factorisé par le Lemme 1.17, on peut aussi reprendre la caractérisation du domaine recherché par l'image de la racine carrée de l'opérateur  $W_{\#}$ . On utilise alors, comme pour la méthode de “Factorization” classique, le critère de Picard 1.16 pour tester l'appartenance d'une fonction test à l'image d'un opérateur. On obtient ainsi une troisième méthode de reconstruction du domaine  $\Omega$  :

$$z \in \Omega \iff \mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}(z) := \left( \sum_j \frac{\left| \langle u_{n_0}(\cdot, z), \psi_j \rangle_{L^2(S^{d-1})} \right|^2}{\sigma_j} \right)^{-1} > 0,$$

où  $(\sigma_j, \psi_j)$  est un système propre de l'opérateur  $W_{\#}$ .

Cependant, les propriétés de l'opérateur  $W_{\#}$  (défini positif et auto-adjoint) se retrouvent déjà dans l'opérateur  $|W^{\infty}|$ . Cet opérateur est lui aussi construit à partir des mesures et par la factorisation (2.15) on a

$$|W^{\infty}|^2 = C^{\star} |V_{n_0}^{\infty} A|^2 C^{\star}.$$

On est alors tenté de croire que l'opérateur  $|W^{\infty}|$  possède une factorisation de la forme  $C^{\star} B C^{\star}$  et vérifie ainsi toutes les propriétés de l'opérateur  $W_{\#}$ . Si cela était vrai, on pourrait alors reprendre les caractérisations du domaine  $\Omega$  par les fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  en y remplaçant l'opérateur  $W_{\#}$  par l'opérateur  $|W^{\infty}|$ . L'avantage est que l'opérateur  $|W^{\infty}|$  est naturellement défini pour des indices à valeurs complexes, mais surtout pour des ensembles de directions de mesures et d'émissions distincts ( $\Gamma_m \neq \Gamma_e$ ). Outre l'absence de

justifications pour les indices à valeurs complexes, la construction de l'opérateur  $W_{\#}$  n'est pas possible dans le cas de directions de mesures et d'émissions distinctes. On aurait alors une nouvelle version des méthodes présentées valide dans un cadre plus large, ce qui semble être confirmé par toutes nos applications numériques.

Enfin, en Section 3.4, nous étudions et comparons nos méthodes de visualisation directes basées sur les fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  dans un cas non trivial afin de cerner leurs limites. Nous testons à cet effet leur sensibilité à divers paramètres physiques. De plus, nous étudions en Section 3.5 le comportement des fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  dans le cadre d'indices complexes et de directions de mesures distinctes des directions d'émission afin de déterminer la validité des restrictions imposées à nos résultats ainsi que la validité de l'opérateur  $|W^{\infty}|$  comme opérateur de mesure au lieu de  $W_{\#}$ .

### 3.1 Méthodes itératives

Nous avons établi, dans le Théorème 2.21, une caractérisation du lieu des défauts à partir des mesures. Cette caractérisation prend la forme d'un test ponctuel : un point  $z$  de l'espace appartient au domaine si et seulement s'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\left| \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle \right| \leq c f_{\widetilde{W}}(\Psi)$  pour toute fonction  $\Psi \in L^2(S^{d-1})$ , où  $u_{n_0}(\theta, z)$  est le champ total pour l'objet non perturbé (d'indice  $n_0$ ) correspondant à une source de type onde plane ayant  $\theta$  pour direction d'incidence et  $f_{\widetilde{W}}$  est la fonctionnelle définie en (2.25). Cette caractérisation n'est pas exploitable sous cette forme mais on peut la reformuler comme un problème de minimisation sous contrainte. Ceci généralise la caractérisation proposée dans [Kirsch 2000].

**Proposition 3.1.** *On reprend les hypothèses du Théorème 2.21 et on suppose que  $k^2$  n'est pas valeur propre de transmission pour la paire d'indices  $(n(x) = 1, n_0)$  avec la Définition 2.18. On peut alors définir la valeur*

$$I(z) := \inf \left\{ f_{\widetilde{W}}(\Psi), \text{ avec } \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle = 1 \right\},$$

et pour tout point  $z \in \mathbb{R}^d$  on a

$$z \in \Omega \iff I(z) > 0. \quad (3.1)$$

**Démonstration :** Le Théorème 2.21 donne l'équivalence

$$z \in \Omega \iff \exists c > 0 / \forall \Psi \in L^2(S^{d-1}), \quad \left| \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle \right| \leq c f_{\widetilde{W}}(\Psi). \quad (3.2)$$

On fixe d'abord  $z \in \Omega$ . Si  $\theta \mapsto u_{n_0}(\theta, z)$  n'est pas la fonction nulle, alors l'ensemble des  $\Psi$  tels que  $\langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle = 1$  est non vide. D'après (3.2), il existe donc une constante  $c > 0$  telle que  $f_{\widetilde{W}}(\Psi) \geq \frac{1}{c}$  pour tout  $\Psi$  tel que  $\langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle = 1$ . La valeur  $I(z)$  est ainsi positive non nulle.

Si  $u_{n_0}(\theta, z) = 0, \forall \theta \in \Gamma_e$ , la valeur  $I(z)$  n'est plus clairement définie puisque l'infimum est évalué sur un ensemble vide. On peut traiter ce cas de plusieurs manières.

1. Soit on prend en compte ce cas en reformulant l'implication :  $z \in \Omega$  implique que  $u_{n_0}(\cdot, z)$  est la fonction nulle ou bien  $I(z) > 0$ .
2. Soit on adopte la convention que dans ce cas l'infimum vaut  $+\infty$  et on considère que c'est une valeur non nulle.
3. Soit on rajoute une condition pour laquelle ce cas n'a pas lieu. En effet, si  $u_{n_0}(\cdot, z)$  est la fonction nulle, alors par le Lemme 2.3 et l'analyticité des champs lointains on a  $\Phi_{n_0}^\infty(z, \cdot)$  nulle. Comme  $\Phi_{n_0}(z, \cdot)$  vérifie (1.9), en appliquant successivement le Lemme 1.2 (unicité du champ lointain) et le Lemme 1.6 (continuation unique) on obtient  $\Phi_{n_0}(z, x) = 0, \forall x \neq z$ . On déduit alors de la représentation intégrale (2.7) pour  $u_{n_0}$  que ce champ total  $u_{n_0}$  est nécessairement nul en dehors du support de  $(n_0 - 1)$ , quelle que soit la source  $u^i$ . Avec une source  $u^i$  non nulle on a donc un champ total  $u_{n_0}$  non nul (voir 1.8) mais nul en dehors du domaine  $D$ . Ceci est précisément le cadre de la Définition 2.18 des valeurs propres de transmission. Ainsi, en supposant que  $k^2$  n'est pas valeur propre de transmission (pour l'indice constant égal à 1 et  $n_0$ ), on écarte la possibilité que  $u_{n_0}(\cdot, z)$  soit nulle et le problème de minimisation est bien défini.

Réciproquement, soit  $z \notin \Omega$ . Pour toute constante  $c > 0$  il existe donc  $\Psi_c$  telle qu'on ait  $\left| \left\langle \Psi_c, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\rangle \right| \geq cf_{\widetilde{W}}(\Psi_c)$ .

Si  $\left| \left\langle \Psi_c, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\rangle \right| = 0$ , alors l'infimum recherché est nul.

Sinon on peut définir  $\varphi_c := \Psi_c / \left\langle \Psi_c, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\rangle$  et on a donc  $\left| \left\langle \varphi_c, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\rangle \right| \geq cf_{\widetilde{W}}(\varphi_c)$  pour toute constante  $c > 0$  et  $\left\langle \varphi_c, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\rangle = 1$ . C'est-à-dire  $1 \geq cf_{\widetilde{W}}(\varphi_c)$ . Ainsi, en faisant tendre  $c$  vers l'infini on a une suite de fonctions  $\varphi_c$  telles que  $\left\langle \varphi_c, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\rangle = 1$  et  $f_{\widetilde{W}}(\varphi_c) \rightarrow 0$ .

Par ailleurs, si on considère le premier choix parmi les trois proposés pour traiter le cas  $u_{n_0}(\theta, z) = 0, \forall \theta \in \Gamma_e$ , il faut aussi prouver que si  $z \notin \Omega$ , alors  $u_{n_0}(\cdot, z)$  ne peut pas être la fonction nulle. Ou encore que  $u_{n_0}(\theta, z) = 0, \forall \theta \in \Gamma_e$  implique  $z \in \Omega$ . Or, si  $u_{n_0}(\cdot, z)$  est la fonction nulle, alors  $\overline{u_{n_0}(\cdot, z)} = C(0)$  et d'après le Corollaire 2.5 on a bien  $z \in \Omega$ . ■

**Remarque 3.2.** La démonstration du Théorème 2.21 montre que  $f_{\widetilde{W}}(\Psi)$  est comparable à  $\|C^*\Psi\|_{L^2(\Omega)}$ . Par ailleurs, il est établi en (2.18) que  $C^*\Psi(z) = \left\langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\rangle$ . Ainsi, la valeur  $I(z)$  s'écrit aussi  $\inf \left\{ \|C^*\Psi\|_{L^2(\Omega)}, \text{ avec } C^*\Psi(z) = 1 \right\}$ .

Par la Proposition 3.1, la détection du domaine recherché  $\Omega$  est donc ramenée à trouver un minimum sous contrainte en chaque point de l'espace testé. On se propose alors de résoudre (3.1) par une méthode de plus grande pente. Ceci implique le calcul du gradient de la forme  $f_{\widetilde{W}}$  qu'on minimise. Pour faciliter ce calcul, au lieu de minimiser la forme  $f_{\widetilde{W}}$  nous allons minimiser la puissance quatrième de  $f_{\widetilde{W}}$  afin d'avoir une norme au carré. Comme on ne cherche qu'à savoir si ce minimum est nul ou non, le résultat sera équivalent.

Par ailleurs, à cause du module, la forme  $f_{\widetilde{W}}$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -différentiable. Nous devons donc considérer la fonctionnelle  $f$  pour des paires de fonctions à valeurs réelles. La fonctionnelle  $f$  est définie sur  $L^2(S^{d-1}, \mathbb{R}) \times L^2(S^{d-1}, \mathbb{R})$  par

$$f(\phi, \psi) := (f_{\widetilde{W}}(\phi + i\psi))^4. \quad (3.3)$$

Nous calculons maintenant le gradient de  $f$  qui servira par la suite dans les méthodes d'optimisation de notre choix.

**Lemme 3.3.** *Le gradient de la forme  $f$  (3.3) définie sur  $L^2(S^{d-1}, \mathbb{R}) \times L^2(S^{d-1}, \mathbb{R})$  s'écrit sous la forme*

$$\nabla f(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} \left[ (\overline{\widetilde{W}\Psi} + \widetilde{W}^*\Psi) \cdot \langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \rangle \right] \\ 2\operatorname{Im} \left[ (-\overline{\widetilde{W}\Psi} + \widetilde{W}^*\Psi) \cdot \langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \rangle \right] \end{pmatrix}, \quad \Psi := \phi + i\psi.$$

**Démonstration :** Pour calculer le gradient de la forme  $f$  on calcule naturellement sa différentielle pour des fonctions à valeurs réelles. On définit alors la fonction  $g : L^2(S^{d-1}, \mathbb{R}) \times L^2(S^{d-1}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$g(\phi, \psi) := \langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \rangle_{L^2(S^{d-1})}, \quad \Psi := \phi + i\psi,$$

pour avoir  $f = |g|^2$ . Dans ce contexte, on sait que

$$Df(\phi, \psi)(u, v) = 2\operatorname{Re} \langle Dg(\phi, \psi)(u, v), g(\phi, \psi) \rangle. \quad (3.4)$$

Il reste alors à calculer la différentielle de la fonction  $g$ . Pour calculer la différentielle d'une forme quadratique, seule sa partie symétrique intervient. L'opérateur  $\widetilde{W}$  n'est pas symétrique mais de plus ses images ne sont pas des fonctions à valeurs réelles. Cependant, c'est tout de même un endomorphisme. On peut donc utiliser sa partie réelle et sa partie imaginaire (ce qui aurait été sa partie symétrique dans le cas réel) qui sont auto-adjointes et qu'on définit par

$$\widetilde{W}_R = (\widetilde{W} + \widetilde{W}^*)/2, \quad \widetilde{W}_I = (\widetilde{W} - \widetilde{W}^*)/2i.$$

Ainsi on obtient de manière générale l'égalité sur les produits hermitiens suivante

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{W}_R\Psi, \Psi \rangle &= \langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \rangle / 2 + \langle \widetilde{W}^*\Psi, \Psi \rangle / 2 \\ &= \langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \rangle / 2 + \langle \Psi, \widetilde{W}\Psi \rangle / 2 \\ &= \operatorname{Re} \langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \rangle. \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\langle \widetilde{W}_I\Psi, \Psi \rangle = \operatorname{Im} \langle \widetilde{W}\Psi, \Psi \rangle.$$

En conséquence directe on a

$$g(\phi, \psi) = \langle \widetilde{W}_R\Psi, \Psi \rangle + i \langle \widetilde{W}_I\Psi, \Psi \rangle, \quad \Psi := \phi + i\psi,$$



et de ceci on déduit que, avec  $\Psi := \phi + i\psi$  et  $\Phi := u + iv$ ,

$$Dg(\phi, \psi)(u, v) = \langle \widetilde{W}_R \Psi, \Phi \rangle + \langle \widetilde{W}_R \Phi, \Psi \rangle + i \langle \widetilde{W}_I \Psi, \Phi \rangle + i \langle \widetilde{W}_I \Phi, \Psi \rangle.$$

Comme les opérateurs  $\widetilde{W}_R$  et  $\widetilde{W}_I$  sont auto-adjoints, avec  $\Psi := \phi + i\psi$  et  $\Phi := u + iv$  on obtient

$$\begin{aligned} Dg(\phi, \psi)(u, v) &= \langle \widetilde{W}_R \Psi, \Phi \rangle + \langle \Phi, \widetilde{W}_R^* \Psi \rangle + i \langle \widetilde{W}_I \Psi, \Phi \rangle + i \langle \Phi, \widetilde{W}_I^* \Psi \rangle \\ &= \langle \widetilde{W}_R \Psi, \Phi \rangle + \overline{\langle \widetilde{W}_R \Psi, \Phi \rangle} + i \langle \widetilde{W}_I \Psi, \Phi \rangle + i \overline{\langle \widetilde{W}_I \Psi, \Phi \rangle} \\ &= 2\operatorname{Re} \langle \Phi, \widetilde{W}_R \Psi \rangle + 2i\operatorname{Re} \langle \Phi, \widetilde{W}_I \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De manière générale, pour deux fonctions  $\Psi$  et  $\Phi$  à valeurs complexes et un produit scalaire complexe (i.e. hermitien), on a

$$\operatorname{Re} \langle \Psi, \Phi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \Psi \\ \operatorname{Im} \Psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \Phi \\ \operatorname{Im} \Phi \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (3.6)$$

Par la règle de différentiation composée (3.4), la différentielle (3.5) et le calcul de la partie réelle d'un produit scalaire (3.6), avec  $\Psi := \phi + i\psi$  et  $\Phi := u + iv$  il suit

$$\begin{aligned} Df(\phi, \psi)(u, v) &= 2\operatorname{Re} \left\langle 2\operatorname{Re} \langle \Phi, \widetilde{W}_R \Psi \rangle + 2i\operatorname{Re} \langle \Phi, \widetilde{W}_I \Psi \rangle, \langle \widetilde{W} \Psi, \Psi \rangle \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \operatorname{Re} \langle \Phi, 2\widetilde{W}_R \Psi \rangle, \operatorname{Re} \langle \widetilde{W} \Psi, \Psi \rangle \right\rangle + 2 \left\langle \operatorname{Re} \langle \Phi, 2\widetilde{W}_I \Psi \rangle, \operatorname{Im} \langle \widetilde{W} \Psi, \Psi \rangle \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \Phi \\ \operatorname{Im} \Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} (\widetilde{W} \Psi + \widetilde{W}^* \Psi) \cdot \operatorname{Re} \langle \widetilde{W} \Psi, \Psi \rangle + \operatorname{Re} (-i\widetilde{W} \Psi + i\widetilde{W}^* \Psi) \cdot \operatorname{Re} \langle -i\widetilde{W} \Psi, \Psi \rangle \\ \operatorname{Im} (\widetilde{W} \Psi + \widetilde{W}^* \Psi) \cdot \operatorname{Im} \langle \widetilde{W} \Psi, \Psi \rangle + \operatorname{Im} (-i\widetilde{W} \Psi + i\widetilde{W}^* \Psi) \cdot \operatorname{Im} \langle \widetilde{W} \Psi, \Psi \rangle \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \Phi \\ \operatorname{Im} \Phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} [(\widetilde{W} \Psi + \widetilde{W}^* \Psi) \cdot \langle \widetilde{W} \Psi, \Psi \rangle] \\ \operatorname{Im} [(-i\widetilde{W} \Psi + i\widetilde{W}^* \Psi) \cdot \langle \widetilde{W} \Psi, \Psi \rangle] \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

■

Nous avons donc le gradient de la (puissance quatrième de la) forme qu'on cherche à minimiser. Il ne reste plus qu'à traiter la contrainte dépendant du point de "sampling"  $z$ . L'espace des contraintes considéré est particulièrement simple puisque c'est un hyperplan affine et on peut expliciter son projecteur.

**Lemme 3.4.** Soit  $z \in \mathbb{R}^d$  fixé. L'espace affine des contraintes  $\mathcal{C}_z$  est alors défini par

$$\mathcal{C}_z := \left\{ \Psi + \frac{\overline{u_{n_0}(\cdot, z)}}{\|u_{n_0}(\cdot, z)\|^2}, \Psi \in L^2(S^{d-1}), \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle = 0 \right\}. \quad (3.7)$$

De plus, le projecteur de  $L^2(S^{d-1}, \mathbb{C})$  sur l'espace  $\mathcal{C}_z$  est défini sur  $L^2(S^{d-1}, \mathbb{R}) \times L^2(S^{d-1}, \mathbb{R})$  par l'application affine

$$P_{\mathcal{C}_z}(\phi, \psi) := \Psi - \frac{\langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle}{\|u_{n_0}(\cdot, z)\|^2} \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} + \frac{\overline{u_{n_0}(\cdot, z)}}{\|u_{n_0}(\cdot, z)\|^2}, \quad \Psi := \phi + i\psi. \quad (3.8)$$

**Démonstration :** La vérification est immédiate. ■

**Remarque 3.5.** Pour que la projection  $P_{\mathcal{C}_z}$  soit définie par (3.8), il faut que  $\theta \mapsto u_{n_0}(\theta, z)$  ne soit pas la fonction nulle. La preuve de la Proposition 3.1 montre que cette possibilité a été écartée en supposant que  $k^2$  n'est pas valeur propre de transmission pour la paire d'indices  $(n(x) = 1, n_0)$ .

### 3.1.1 Reconstruction du domaine par une méthode de plus grande pente

Trouver un minimiseur de la forme  $f$  (3.3) sur l'espace  $\mathcal{C}_z$  est équivalent à trouver un minimiseur sur  $L^2(S^{d-1})$  tout entier de la forme

$$g_z := f \circ P_{\mathcal{C}_z}. \quad (3.9)$$

Comme on dispose pour la forme  $f$  et le projecteur  $P_{\mathcal{C}_z}$  (3.8) d'une formulation explicite, on peut expliciter le gradient de la forme  $g_z$  et appliquer une méthode de plus grande pente pour en trouver le minimum. En effet on a directement

$$\nabla g_z(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{P}_{\mathcal{C}_z}^* \left( \nabla f \circ P_{\mathcal{C}_z}(\Psi) \right) \right\} \\ \operatorname{Im} \left\{ \tilde{P}_{\mathcal{C}_z}^* \left( \nabla f \circ P_{\mathcal{C}_z}(\Psi) \right) \right\} \end{pmatrix}, \quad \Psi = (\phi + i\psi), \quad (3.10)$$

où  $\nabla f$  est donné au Lemme 3.3 et où  $(\tilde{P}_{\mathcal{C}_z})^*$  est l'adjoint de la partie linéaire de  $P_{\mathcal{C}_z}$ , notée  $\tilde{P}_{\mathcal{C}_z}$  et définie par

$$\tilde{P}_{\mathcal{C}_z}(\phi, \psi) := \Psi - \frac{\langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle}{\|u_{n_0}(\cdot, z)\|^2} \overline{u_{n_0}(\cdot, z)}, \quad \Psi := \phi + i\psi. \quad (3.11)$$

Nous sommes alors en mesure d'appliquer la méthode de plus grande pente décrite par l'algorithme suivant.

**Input :** Choisir  $x_0$  dans  $L^2(S^{d-1})$   
**while**  $\|x_{n+1} - x_n\| / \|x_n\| > 10^{-2}$  **do**  
    Choisir un pas de descente  $\alpha_n$  tel que  $g_z(x_n - \alpha_n \nabla g_z(x_n)) < g_z(x_n)$ ;  
    Avancer dans la direction de descente :  $x_{n+1} = x_n - \alpha_n \nabla g_z(x_n)$ ;  
**end**  
**Output :**  $g_z(x_{n+1})$

**Algorithme 1:** Plus grande pente

Les méthodes pour sélectionner le pas de descente  $\alpha_n$  sont multiples et on peut citer les règles de Wolfe parmi les plus efficaces (voir par exemple [Bonnans *et al.* 2006, Chapitre 3.4]) ou la méthode de la section dorée parmi les plus simples. Cette méthode est décrite par l'Algorithme 2.

```

Data :  $\tau := (1 + \sqrt{5})/2$ 
Poser  $a = 0$ 
Poser  $b = 100$ 
for  $i = 1 \dots 15$  do
    Poser  $a' = a + (b - a)/\tau^2$ 
    Poser  $b' = a + (b - a)/\tau$ 
    if  $q(a') \leq q(b')$  then
         $b = b'$ 
    end
    if  $q(a') \geq q(b')$  then
         $a = a'$ 
    end
end
Output :  $\alpha_n = (a + b)/2$ 

```

**Algorithme 2:** Recherche du pas de descente par la méthode dite de la section dorée

D'après la Proposition 3.1, si  $(g_z(x_n))_n$  tend vers 0, le point  $z$  est en dehors de  $\Omega$  et dedans sinon.

Cependant, quand la projection est facile à écrire, comme c'est le cas ici, l'algorithme de gradient projeté donne en général de meilleurs résultats.

### 3.1.2 Reconstruction du domaine par une méthode de gradient projeté

Pour minimiser la fonctionnelle  $f$  sur l'ensemble des contraintes  $\mathcal{C}_z$ , quand la projection est facile à évaluer on dispose aussi de l'algorithme du gradient projeté [Rosen 1960]. C'est une méthode de minimisation sous contraintes itérative dont chaque itération se fait en deux temps : d'abord, on descend le long du gradient sans tenir compte de la contrainte et ensuite on projette le point sur l'ensemble des contraintes.

```

Input : Choisir  $x_0$  dans  $\mathcal{C}_z$ 
while  $\|x_{n+1} - x_n\| / \|x_n\| < 10^{-2}$  do
    Choisir un pas de descente  $\alpha_n$  tel que  $f(x_n - \alpha_n \nabla f(x_n)) < f(x_n)$ ;
    Projeter le résultat sur l'espace des contraintes :  $x_{n+1} = P_{\mathcal{C}_z}(x_n - \alpha_n \nabla f(x_n))$ ;
end
Output :  $f(x_{n+1})$ 

```

**Algorithme 3:** Gradient projeté

Comme précédemment, si  $(f(x_n))_n$  tend vers 0, le point  $z$  est en dehors de  $\Omega$  et dedans

sinon.

**Remarque 3.6.** Du fait que le projecteur  $P_{\mathcal{C}_z}$  soit affine, les méthodes de plus grande pente et de gradient projeté sont très proches. Si on choisit un pas de descente constant  $\alpha_n = \alpha$ , avec une initialisation  $x_0 \in \mathcal{C}_z$  les algorithmes de plus grande pente (Algorithme 1) et de gradient projeté (Algorithme 3) définissent la même suite. En effet, par construction, tous les termes de la suite définie par l'algorithme du gradient projeté sont des éléments de  $\mathcal{C}_z$  et on déduit

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}_z}(x_n - \alpha_n \nabla f(x_n)) &= \tilde{P}_{\mathcal{C}_z}(x_n) - \alpha_n \tilde{P}_{\mathcal{C}_z}(\nabla f(x_n)) + \frac{\overline{u_{n_0}(\cdot, z)}}{\|u_{n_0}(\cdot, z)\|^2} \\ &= P_{\mathcal{C}_z}(x_n) - \alpha_n \tilde{P}_{\mathcal{C}_z}(\nabla f(x_n)) \\ &= x_n - \alpha_n \tilde{P}_{\mathcal{C}_z}(\nabla f(x_n)) \\ &= x_n - \alpha_n \tilde{P}_{\mathcal{C}_z}(\nabla f \circ P_{\mathcal{C}_z}(x_n)), \end{aligned}$$

où  $\tilde{P}_{\mathcal{C}_z}$  est la partie linéaire de  $P_{\mathcal{C}_z}$  définie en (3.11). On reconnaît alors le gradient de  $g_z$  défini en (3.10) et donc le terme général de la suite définie par l'algorithme de plus grande pente.

Par contre, la recherche du pas de descente pour l'algorithme de gradient projeté se fait avant projection. Si on ne la fixe pas constante, la valeur  $\alpha_n$  retenue n'est alors a priori pas la même que celle qui sera retenue pour l'algorithme de plus grande pente.

### 3.1.3 Validation numérique sur un cas simple

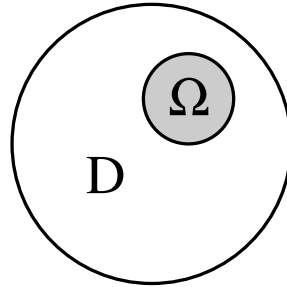


FIGURE 3.1: Schéma de l'objet et du défaut

Nous avons validé la méthode de plus grande pente appliquée à  $g_z$  et la méthode de gradient projeté appliquée à  $f_{\widetilde{W}}$  avec le cas simple en 2D présentée sur la Figure 3.1. L'objet considéré est circulaire et le support du défaut est un autre disque décentré. Le diamètre de l'objet est fixé à 2,1 et celui du défaut à 0,6. Avec un nombre d'onde fixé à  $k = 6$ , la taille de l'objet vaut donc environ deux fois la longueur d'onde  $\lambda := 2\pi/k$  et la taille du défaut vaut environ une demi longueur d'onde. Les grandeurs caractéristiques de l'exemple étudié sont donc proches.

On voit sur la Figure 3.2 les résultats obtenus en chaque point de "sampling"  $z_i$  (environ 8000) avec les deux méthodes itératives présentées. La Figure 3.2(a) présente la carte des valeurs du minimum de la forme  $g_{z_i}$  obtenu par une méthode de plus grande pente. La

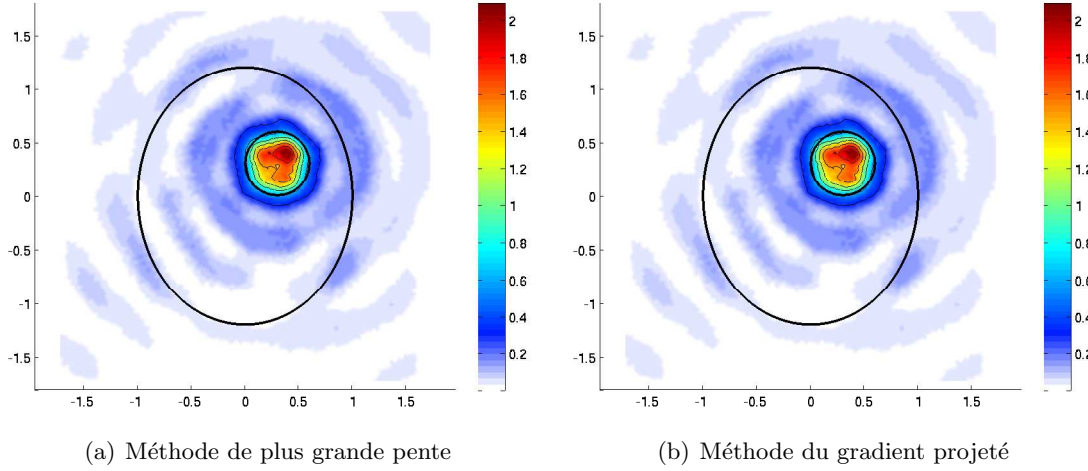


FIGURE 3.2: Reconstruction du domaine d'un défaut par des méthodes itératives en initialisant avec  $x_0 = P_{\mathcal{C}_z}(0)$

Figure 3.2(b) quand-à-elle, présente la carte des valeurs du minimum de la forme  $f$  sur l'ensemble  $\mathcal{C}_{z_i}$  obtenue par la méthode du gradient projeté. Dans les deux cas, c'est la méthode de la section dorée qui a servi pour choisir le pas de descente  $\alpha_n$  et chaque suite a été initialisée par  $x_0 = P_{\mathcal{C}_z}(0) = \frac{u_{n_0}(\cdot, z_i)}{\|u_{n_0}(\cdot, z_i)\|^2} \in \mathcal{C}_{z_i}$ . En effet, il semble naturel de prendre un point de départ directement dans l'ensemble des contraintes. Bien que les méthodes ne soient pas équivalentes (voir Remarque 3.6), on constate que les résultats sont identiques. Pour les deux méthodes, le nombre maximal d'itérations est de 28, avec une médiane à 1. Le résultat final est donc obtenu dès la première itération.

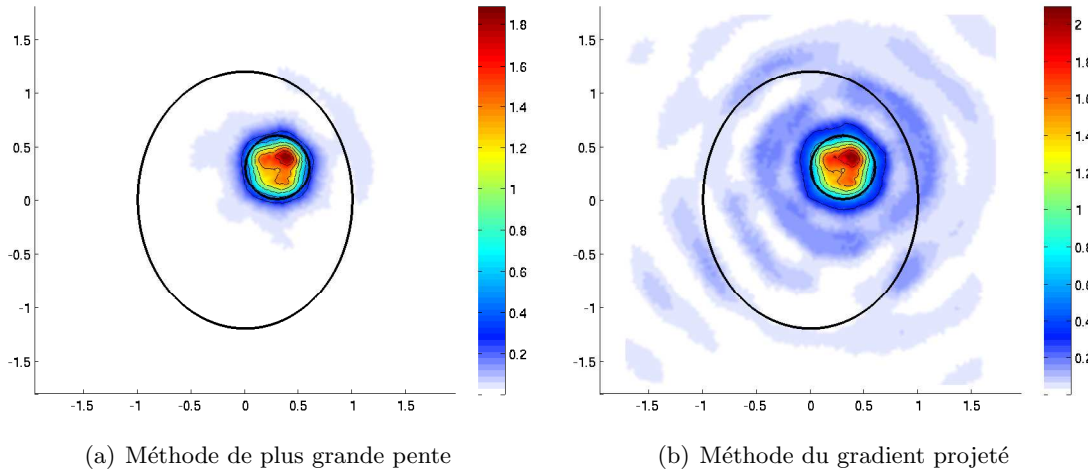


FIGURE 3.3: Reconstruction du domaine d'un défaut par des méthodes itératives en initialisant avec  $x_0 = 0$

**Remarque 3.7.** Le choix du point d'initialisation influe naturellement sur le résultat obtenu. On présente sur la Figure 3.3 le résultat obtenu dans les mêmes conditions que pour la Figure 3.2 mais en initialisant chaque suite avec  $x_0 = 0$ . On constate sur la Figure 3.3(a)

que la méthode de plus grande pente a permis une reconstruction du support du défaut plus contrastée qu'en initialisant avec  $x_0 = P_{\mathcal{C}_z}(0)$ . Par contre, le nombre d'itérations varie entre 46 et 92, contre un maximum de 28 itérations pour le cas précédent, avec une médiane à 62 (à comparer avec la médiane de 1 du cas précédent). Le temps de calcul s'en retrouve naturellement décuplé. La Figure 3.3(b) indique que les résultats avec la méthode du gradient projeté sont similaires pour les initialisations  $x_0 = P_{\mathcal{C}_z}(0)$  et  $x_0 = 0$ . Le nombre d'itérations est augmenté d'exactly 1 en chaque point  $z_i$ .

## 3.2 Méthodes directes

Nous avons vu que la caractérisation du domaine  $\Omega$  par les mesures se traduit par un problème de minimisation sous contraintes dans la Proposition 3.1. Cependant, les temps de calcul pour les méthodes itératives implémentées ci-dessus restent non négligeables. Pour les 8000 points testés dans les conditions indiquées pour la Figure 3.2 par exemple, en initialisant avec  $x_0 = P_{\mathcal{C}_z}(0)$  chacune des deux méthodes itératives à nécessité environ 7 minutes sur un PC de bureau (core 2 Duo@3Ghz). Dans un cadre général, les méthodes itératives seront donc a priori assez coûteuses.

### 3.2.1 Reconstruction du domaine par résolution explicite du problème de minimisation dans un cas particulier ( $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$ )

Si l'opérateur  $\widetilde{W}$  était positif, il posséderait une racine carrée, la forme  $f_{\widetilde{W}}$  serait quadratique et on aurait une expression immédiate du minimum sous contrainte linéaire qu'on recherche dans la Proposition 3.1. A priori, ce n'est pas le cas. Par contre, la méthode de "Factorization" pour opérateurs non-normaux indique comment construire, à partir de l'opérateur de mesures, un nouvel opérateur conservant une factorisation symétrique tout en étant positif et auto-adjoint. Ce nouvel opérateur reste donc construit uniquement à partir des mesures physiques et gagne des propriétés par rapport à l'opérateur de mesures. Ceci nous permet d'établir une nouvelle méthode non-itérative de localisation des défauts.

**Théorème 3.8.** *Avec l'hypothèse de contraste 2.16, si  $k^2$  n'est valeur propre de transmission ni pour la paire d'indices  $(n_0, n_1)$ , ni pour la paire  $(n(x) = 1, n_0)$  et si  $\Gamma_m = \Gamma_e = S^{d-1}$ , alors pour tout point  $z \in \mathbb{R}^d$  on a l'équivalence*

$$z \in \Omega \iff \mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}(z) := \left\| W^\dagger \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\|^{-2} > 0,$$

où  $u_{n_0}(\theta, z)$  est la solution au système (1.1)-(1.5) avec une source onde plane ayant  $\theta$  pour direction d'incidence et  $W^\dagger$  est un pseudo-inverse de  $W_\#^{\frac{1}{2}}$  où  $W_\# = \left| \widetilde{W} + \widetilde{W}^* \right| + \left| \widetilde{W} - \widetilde{W}^* \right|$ , l'opérateur  $\widetilde{W}$  étant défini à la Proposition 2.14 et la notation "valeur absolue" pour un opérateur  $L$  étant définie par  $|L| = (L^* L)^{\frac{1}{2}}$ .

**Démonstration :** La preuve s'articule en trois points. Nous allons d'abord justifier la

factorisation de l'opérateur  $W_{\#}$  pour que la forme  $f_{W_{\#}}$  définie par

$$f_{W_{\#}}(\Psi) = |\langle W_{\#}\Psi, \Psi \rangle|^{\frac{1}{2}}, \quad \Psi \in L^2(S^{d-1}),$$

soit comparable à  $\|C^*\Psi\|$ . Ensuite, nous reformulons la caractérisation du Théorème 2.21 comme un problème de minimisation sous contrainte similaire à celui de la Proposition 3.1, mais spécifique à la forme  $f_{W_{\#}}$ . Finalement, la résolution directe de ce problème donnera la fonction indicatrice  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$ .

1. Tout d'abord, nous montrons la correspondance entre les images des opérateurs  $C\chi_{\Omega}$  et  $W_{\#}^{\frac{1}{2}}$ . Cette correspondance est le résultat du Lemme 1.17 appliqué avec  $F = \widetilde{W}$  (défini dans la Proposition 2.14),  $H = C\chi_{\Omega}$  (défini dans le Corollaire 2.5),  $T = A$  (défini dans le Lemme 2.10) et  $t = 0$ . Il faut donc s'assurer que l'opérateur  $F$  admet bien une factorisation de la forme  $F = HTH^*$  et que les hypothèses 1, 2, 3 et 4 sont vérifiées.

La Proposition 2.14 montre que l'opérateur  $\widetilde{W}$  admet une factorisation de la forme  $CAC^*$  où  $A$  est un automorphisme de  $L^2(\Omega)$  par le Lemme 2.8. On a donc la factorisation requise  $\widetilde{W} = C\chi_{\Omega}A\chi_{\Omega}C^*$ .

Ensuite, par l'équation (2.18) et l'injectivité des fonctions de Herglotz du Lemme 1.9, on a l'injectivité de  $C^*$ . Ainsi, l'image de  $C$  est dense, ce qui est l'hypothèse 1 du Lemme 1.17. Les hypothèses 2, 3 et 4 qui servent à la coercivité de l'opérateur  $A$  sont vérifiées dans le Lemme 2.20.

De ceci on déduit le résultat suivant : l'opérateur  $W_{\#}$  est auto-adjoint, positif et possède une factorisation de la forme  $W_{\#} = C\chi_{\Omega}T_{\#}\chi_{\Omega}C^*$  où l'opérateur  $T_{\#}$  est coercif. De plus, les images de  $C\chi_{\Omega}$  et  $W_{\#}^{\frac{1}{2}}$  coïncident.

2. Grâce à cette correspondance, nous pouvons formuler la caractérisation du domaine  $\Omega$  par un problème de minimisation sous contrainte. En reprenant la preuve du Théorème 2.21, ceci nous donne

$$z \in \Omega \iff \forall \Psi \in L^2(S^{d-1}), \quad \left| \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle \right| \lesssim f_{W_{\#}}(\Psi).$$

En reprenant la preuve de la proposition 3.1, ceci est alors équivalent à

$$\inf \left\{ f_{W_{\#}}(\Psi), \text{ avec } \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle = 1 \right\} > 0.$$

Mais comme l'opérateur  $W_{\#}$  est positif et auto-adjoint, il possède une racine carrée et on a  $f_{W_{\#}}(\Psi) = \left\| W_{\#}^{\frac{1}{2}}\Psi \right\|$ . En minimisant de manière équivalente le carré de cette fonction, on aboutit ainsi à la caractérisation du support des défauts par le problème de minimisation quadratique sous contrainte affine suivant

$$z \in \Omega \iff \inf \left\{ \left\| W_{\#}^{\frac{1}{2}}\Psi \right\|^2, \text{ avec } \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle = 1 \right\} > 0. \quad (3.12)$$

3. La fonctionnelle  $(f_{W_{\#}})^2$  qu'on minimise alors est quadratique et l'espace des contraintes est un hyperplan affine. On sait donc qu'il existe un minimum global, noté  $\Psi_{\star}$ , calculable explicitement. Pour cela, soit  $g : L^2(\Gamma_e) \rightarrow \mathbb{C}$  la forme linéaire de la contrainte définie par

$$g(\Psi) := \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle.$$

Nous allons écrire les conditions d'optimalité Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour le problème (3.12), mais comme pour le calcul du gradient de la forme  $f_{\widetilde{W}}$  du Lemme 3.3, la fonction  $f_{W_{\#}}$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -différentiable. Il faut là encore considérer une fonction  $\tilde{f}$  définie sur le produit d'espaces de Hilbert réels  $L^2(\Gamma_e, \mathbb{R}) \times L^2(\Gamma_e, \mathbb{R})$  par

$$\tilde{f}(\phi, \psi) := f_{W_{\#}}(\phi + i\psi).$$

Par conséquent, on considère aussi la fonction

$$\tilde{g}(\phi, \psi) := g(\phi + i\psi).$$

Les conditions d'optimalité KKT à l'optimum  $(\phi_{\star}, \psi_{\star})$  sont alors l'annulation du gradient du Lagrangien et la vérification de la contrainte

$$\nabla \tilde{f}(\phi_{\star}, \psi_{\star}) - \alpha_{\star} \nabla \tilde{g}(\phi_{\star}, \psi_{\star}) = 0, \quad (3.13a)$$

$$\tilde{g}(\phi_{\star}, \psi_{\star}) = 1. \quad (3.13b)$$

Pour ce qui est de la qualification des contraintes (gradient de  $g$  non nul), nous renvoyons à la Remarque 3.5. Ensuite, le calcul du gradient de  $\tilde{f}$  passe par celui de sa différentielle. Comme  $W_{\#}$  est auto-adjoint, avec  $\Psi := \phi + i\psi$  et  $\Phi := u + iv$  on a directement

$$D\tilde{f}(\phi, \psi)(u, v) = \langle W_{\#}\Psi, \Phi \rangle + \langle W_{\#}\Phi, \Psi \rangle = 2\operatorname{Re} \langle \Phi, W_{\#}\Psi \rangle.$$

Ainsi, d'après le calcul 3.6 de la partie réelle d'un produit scalaire hermitien

$$D\tilde{f}(\phi, \psi)(u, v) = 2 \langle u, \operatorname{Re}(W_{\#}\Psi) \rangle + 2 \langle v, \operatorname{Im}(W_{\#}\Psi) \rangle,$$

et on en déduit le gradient de la fonction  $\tilde{f}$  :

$$\nabla \tilde{f}(\phi, \psi) = 2 \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(W_{\#}\Psi) \\ \operatorname{Im}(W_{\#}\Psi) \end{pmatrix}.$$

De même, en séparant les parties réelles et imaginaires dans le produit hermitien, pour la fonction  $\tilde{g}$ , on a

$$\nabla \tilde{g}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \\ i u_{n_0}(\cdot, z) \end{pmatrix}.$$

Avec  $\Psi_{\star} := \phi_{\star} + i\psi_{\star}$ , la première condition d'optimalité (3.13a) donne alors

$$\begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(W_{\#}\Psi_{\star}) - \alpha_{\star} \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \\ 2\operatorname{Im}(W_{\#}\Psi_{\star}) + i\alpha_{\star} u_{n_0}(\cdot, z) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

En additionnant la première ligne de (3.14) et  $i$  fois la seconde ligne de (3.14), ceci implique

$$W_{\#}\Psi_{\star} - \alpha_{\star} \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} = 0.$$

Comme on sait que  $\Psi_{\star}$  existe, on peut construire une solution à cette équation à l'aide de  $W^{\dagger}$ , le pseudo-inverse de Moore-Penrose de l'opérateur  $W_{\#}^{\frac{1}{2}}$  (voir par exemple [Björck 1996, Section 1.2.5]) :

$$\Psi_{\star} = \alpha_{\star} \left( W^{\dagger} \right)^{\star} W^{\dagger} \overline{u_{n_0}(\cdot, z)}. \quad (3.15)$$



La seconde condition d'optimalité (3.13b) donne alors

$$\alpha_\star = \left\| W^\dagger \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\|^{-2}. \quad (3.16)$$

Ainsi, la valeur au point optimal dans l'ensemble des contraintes est

$$\left\| W_{\#}^{\frac{1}{2}} \Psi_\star \right\|^2 = \alpha_\star^2 \left\| W^\dagger \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\|^2 = \left\| W^\dagger \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\|^{-2}. \quad (3.17)$$

■

Nous avons donc une caractérisation du domaine  $\Omega$  par le noyau de l'opérateur  $W^\dagger$  rendue possible par la construction d'un opérateur auto-adjoint. Il suffit alors de tracer les valeurs de la fonction  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  pour obtenir une visualisation du domaine recherché.

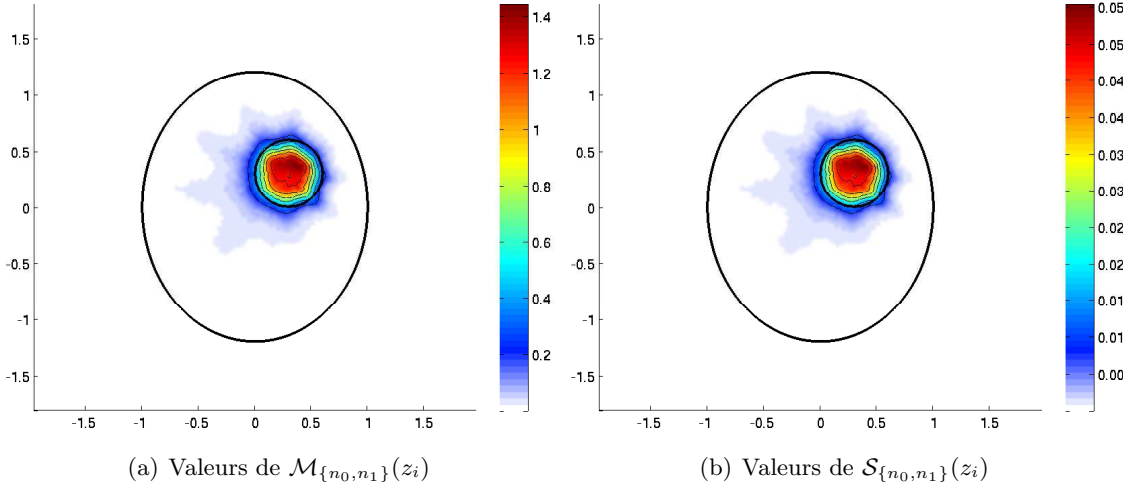


FIGURE 3.4: Reconstruction du domaine d'un défaut par des méthodes directes

La Figure 3.4(a) illustre le résultat obtenu par cette méthode et représente la carte des valeurs  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)$  pour les points de "sampling"  $z_i$  dans exactement les mêmes conditions que les méthodes itératives illustrées sur la Figure 3.2. L'évaluation de la fonction  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  sur les 8633 points de "sampling" de l'exemple commun aux méthodes itératives à requis environ 1 seconde de calcul. Le gain par rapport aux 7 minutes nécessaires aux méthodes de descente indique clairement l'intérêt de cette méthode directe.

**Remarque 3.9.** L'opérateur  $W^\dagger$  est construit à partir de transformations sur les opérateurs de champ lointain  $F_{n_1}$  et  $F_{n_0}$  qui sont des opérateurs intégraux. Pour construire une représentation discrète de  $F_{n_1}$  et  $F_{n_0}$ , il serait naturel de tenir compte d'une matrice de masse, censée approcher l'intégrale définissant ces opérateurs.

Cependant, le spectre d'une matrice de masse n'est pas réduit au singleton  $\{1\}$ . De ce fait, si on construit une représentation discrète de  $W^\dagger$  en tenant compte de la matrice de masse, son spectre se retrouve décalé. Ceci modifie l'évaluation du pseudo-inverse de  $W_{\#}^{\frac{1}{2}}$ . Nous construisons alors une représentation discrète de  $W^\dagger$  en ne tenant compte que d'un

redimensionnement des valeurs en champ lointain par une valeur constante  $h = 2\pi/N$  au lieu d'une matrice de masse éléments finis (où  $N$  est le nombre de points de mesures sur l'ensemble  $\Gamma_m = [0, 2\pi]$ ).

### 3.2.2 Reconstruction du domaine par une méthode spectrale ( $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$ )

Cependant, le but affiché de la factorisation de l'opérateur  $F_{\#}$  dans le Lemme 1.17 n'est pas de produire un opérateur positif. Le résultat exploité dans la méthode de "Factorization" utilisant l'opérateur  $F_{\#}$  est la correspondance directe des images des opérateurs  $H$  et  $F_{\#}^{\frac{1}{2}}$  [Kirsch & Grinberg 2008, Théorème 4.10]. Cette correspondance peut être vue comme un corollaire du Lemme 1.13, une fois la factorisation de l'opérateur  $F_{\#}$  obtenue. Nous reprenons alors cette correspondance entre images d'opérateurs pour obtenir une seconde méthode de reconstruction directe de la forme des défauts à partir, cette fois-ci, d'une caractérisation de l'image de l'opérateur  $W_{\#}^{\frac{1}{2}}$ .

**Théorème 3.10.** *Avec l'hypothèse de contraste 2.16, si  $k^2$  n'est pas valeur propre de transmission pour les indices  $n_0$  et  $n_1$  et si  $\Gamma_m = \Gamma_e = S^{d-1}$ , alors pour tout point  $z \in \mathbb{R}^d$  on a l'équivalence*

$$z \in \Omega \iff \mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}(z) := \left( \sum_j \frac{|\langle u_{n_0}(\cdot, z), \psi_j \rangle_{L^2(S^{d-1})}|^2}{\sigma_j} \right)^{-1} > 0,$$

où  $u_{n_0}(\theta, z)$  est la solution au système (1.1)-(1.5) avec une source onde plane ayant  $\theta$  pour direction d'incidence et où les  $\sigma_j \in \mathbb{R}_+$  sont les valeurs propres associées aux fonctions propres  $\psi_j \in L^2(S^{d-1})$  de l'opérateur  $W_{\#}$ , défini au Théorème 3.8.

**Démonstration :** On a vu dans la preuve du Théorème 3.8 que le Lemme 1.17 s'applique à l'opérateur  $\widetilde{W}$ . Ainsi, les images des opérateurs  $C\chi_{\Omega}$  et  $W_{\#}^{\frac{1}{2}}$  coïncident. La caractérisation du Corollaire 2.5 devient donc

$$z \in \Omega \iff \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \in \mathcal{R}\left(W_{\#}^{\frac{1}{2}}\right). \quad (3.18)$$

La caractérisation du domaine  $\Omega$  par la fonction  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  est alors l'application du critère de Picard (Lemme 1.16) pour l'appartenance à l'image d'un opérateur. ■

**Remarque 3.11.** La relation (3.18) de la démonstration du Théorème 3.10, et la relation (3.16) de la démonstration du Théorème 3.8, montrent que ces deux Théorèmes sont chacun une expression du même principe : un point  $z$  est dans  $\Omega$  s'il existe une solution à l'équation

$$W_{\#}^{\frac{1}{2}}\Psi = \overline{u_{n_0}(\cdot, z)}.$$

On retrouve ainsi une formulation ressemblant à l'équation de champ lointain (1.18) de la "Linear Sampling Method". Ceci suggère la possibilité d'une extension de la localisation de défauts dans des milieux inhomogènes pour la LSM.

On présente sur la Figure 3.4(b) le résultat obtenu par cette méthode dans les mêmes conditions qu’auparavant. Les temps de calcul pour l’évaluation des fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  sont comparables.

**Remarque 3.12.** *En plus du choix de la matrice de masse exposé à la remarque 3.9, l’évaluation numérique de la fonction  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  demande quelques ajustements. En effet, l’évaluation de la fonction  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  utilise directement les valeurs propres d’un opérateur compact dont on sait qu’elles forment une suite tendant vers 0. Comme toutes les valeurs propres  $\sigma_j$  sont calculées à la même échelle, les valeurs propres trop petites sont entachées d’une erreur numérique relative très grande par rapport aux premières valeurs propres qui sont éloignées de 0. Ainsi, l’évaluation de la fonction  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  est particulièrement instable. Pour y remédier, on filtre arbitrairement en ne considérant que les valeurs propres supérieures à  $\max(\sigma_j) \cdot 10^{-10}$ . Dans l’exemple illustré sur la Figure 3.4(b) on ne retient par ce filtrage que 33 valeurs propres sur 165.*

### 3.3 Un opérateur de mesures simplifié ( $|W^\infty|$ )

Tout d’abord, il est à noter que nos deux méthodes restent parfaitement cohérentes avec la méthode de “Factorization” et la généralisent au sens où si on fixe  $n_0 = 1$ , on retrouve le même résultat.

Par ailleurs, la méthode “ $F_\#$ ” que nous avons reprise pour aboutir à la reconstruction du domaine des défauts est très similaire à la méthode originale “ $(F^\star F)^{\frac{1}{4}}$ ” [Kirsch 2002, Kirsch 1998]. Dans les deux cas, un opérateur de mesures  $F$  (ou  $F_\#$ ) est construit pour avoir deux factorisations. Une de la forme  $HTH^\star$ , avec un opérateur  $H$  qui caractérise virtuellement le domaine recherché comme dans le Corollaire 2.5, et une autre de la forme  $|F|^{\frac{1}{2}} U |F|^{\frac{1}{2}}$ . Si les opérateurs  $T$  et  $U$  sont coercifs, on montre avec le Lemme 1.13 que les images de  $H$  et  $|F|^{\frac{1}{2}}$  coïncident. Cependant la factorisation de  $F$  demande qu’il soit normal et la construction de  $F_\#$  impose des conditions restrictives sur le cadre d’applications. Par exemple, la construction et la factorisation de  $W_\#$  nécessitent des indices à valeurs réelles et des ensembles de directions de mesures ainsi que d’émissions recouvrant la sphère unité.

Or, il semble que considérer une décomposition en valeurs singulières (SVD) de l’opérateur  $W^\infty$ , défini en (2.5), pour utiliser

$$|W^\infty| := \left( (W^\infty)^\star W^\infty \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

comme opérateur de mesures, au lieu de  $\widetilde{W}$ , défini à la Proposition 2.14, ou  $W_\#$ , défini au Théorème 3.8, permettrait de s’affranchir de ces limitations. En effet, il se dégage des preuves des Théorèmes 3.8 et 3.10 que ce qui est nécessaire pour construire les fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  ou  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  est un opérateur construit à partir des mesures qui soit

1. positif,
2. auto-adjoint,
3. connecté à l’opérateur  $C$  du Corollaire 2.5 par une factorisation symétrique.

Tout d'abord, l'opérateur  $|W^\infty|$  se définit à partir de la SVD de l'opérateur  $W^\infty$  et cette décomposition s'applique à tout opérateur compact [Hislop & Sigal 1996, Section 9.4]. Cette propriété est particulièrement stable et vérifiée par tous les opérateurs de mesures rencontrés jusqu'alors. En effet, l'opérateur de Herglotz  $H$  défini dans la preuve du Lemme 2.10 est compact et représente une superposition d'ondes planes. Ainsi, tant que les sources sont des superpositions d'ondes planes, toute transformation continue des champs lointains mesurés donnera lieu à un opérateur de mesures compact. L'opérateur  $|W^\infty|$  vérifie alors les propriétés suivantes.

**Lemme 3.13.** *L'opérateur  $|W^\infty|$  est positif, auto-adjoint et vérifie  $|W^\infty|^2 = C |V_{n_0}^\infty A|^2 C^*$ .*

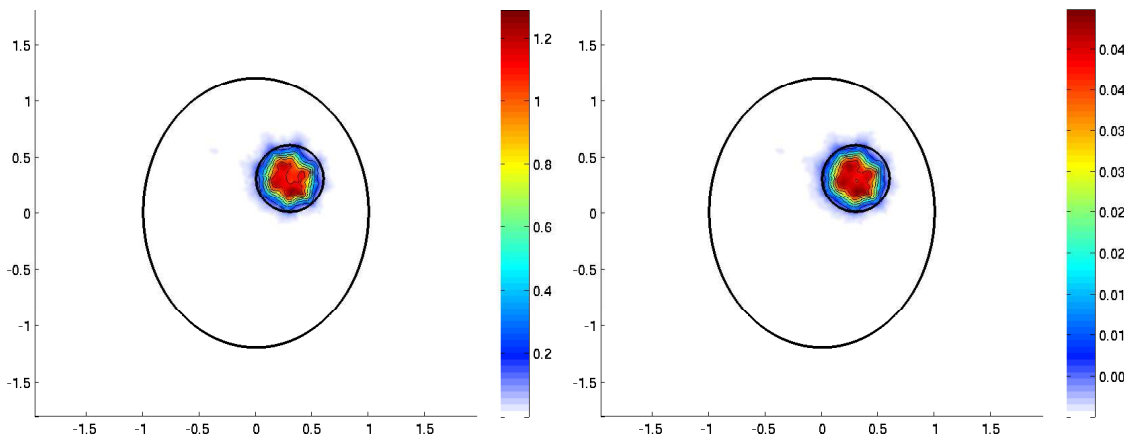
**Démonstration :** C'est immédiat avec la factorisation du Lemme 2.10. ■

Ceci est valable pour des indices à valeurs complexes mais aussi en particulier pour des ensembles de directions de mesures et d'émissions distincts et ne recouvrant pas nécessairement la sphère unité ( $\Gamma_e \neq \Gamma_m \neq S^{d-1}$ ). Cela se traduit matriciellement par le fait que la SVD est définie pour des matrices rectangulaires. On peut donc considérer une représentation discrète de l'opérateur de mesures  $|W^\infty|$  pour les implémentations numériques des deux méthodes présentées précédemment.

Toute la difficulté théorique est alors reportée sur le problème consistant à prouver l'existence d'un opérateur coercif  $E$  tel que

$$|W^\infty| = CEC^*. \quad (3.20)$$

Si on savait prouver l'égalité (3.20), on pourrait donc reprendre les deux fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  à l'identique en considérant  $|W^\infty|$  comme opérateur de mesures au lieu de  $W_\#$ . Les deux méthodes de reconstructions basées sur ces fonctions adaptées seraient alors valables dans le cadre d'indices à valeurs complexes et avec des directions de mesures distinctes des directions d'émissions.



(a) Valeurs de  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)$  avec l'opérateur  $|W^\infty|$  (b) Valeurs de  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)$  avec l'opérateur  $|W^\infty|$

FIGURE 3.5: Reconstruction du domaine d'un défaut par des méthodes directes simplifiées

Quoi qu'il en soit, il est très simple de changer l'opérateur construit à partir des mesures utilisé dans l'évaluation numérique des fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$ . La Figure 3.5 montre

les résultats obtenus avec ces fonctions modifiées, toujours dans les mêmes conditions que précédemment. On voit que la possibilité d’avoir une méthode directe de localisation des défauts à partir de l’opérateur  $|W^\infty|$  est validée, au moins numériquement.

### 3.4 Comparaison des méthodes directes

Nous comparons maintenant le comportement des méthodes directes présentées dans la partie précédente par le biais de plusieurs exemples numériques en deux dimensions.

Toutes les méthodes issues de la caractérisation du Théorème 2.21 sont des méthodes dites de “sampling” : elles consistent en un test binaire à appliquer à tous les points de l’espace pour localiser le domaine recherché à partir des données en champ lointain. Nous choisissons alors un ensemble (fini)  $\{z_i\}_{i=1,\dots,N_p}$  de points de “sampling” en lesquels nous allons représenter les valeurs  $\mathcal{M}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$ . D’après les Théorèmes 3.8 et 3.10, ces valeurs devraient être proches de 0 en dehors des défauts et non nulles à l’intérieur.

Afin de mieux cerner le comportement de nos méthodes, les études de cette section seront menées sur un objet et des défauts ayant des géométries non triviales. Nous étudions et comparons dans ce cas les résultats donnés par les fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$  en faisant varier la quantité de bruit, le nombre d’onde et le nombre de directions d’émissions/réceptions sur la sphère unité. Par ailleurs, en nous appuyant sur la Section 3.3, nous considérons aussi le comportement de ces mêmes fonctions mais définies cette fois-ci avec  $|W^\infty|$  (3.19) comme opérateur de mesures au lieu de  $W_\#$ . Nous comparons ainsi les résultats obtenus par cette conjecture avec les résultats démontrés.

#### 3.4.1 Construction du cas test

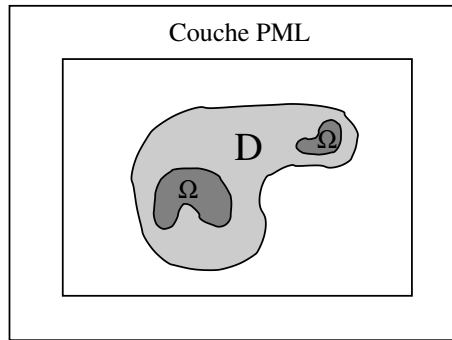


FIGURE 3.6: Schéma de la géométrie avec la couche PML.

Nous avons choisi pour les comparaisons la géométrie illustrée sur la Figure 3.6 mettant en avant certains points spécifiques des méthodes considérées. Tout d’abord, nous avons choisi une géométrie sans trop de symétries pour s’assurer de ne pas profiter de simplifications apportant plus d’informations que suggéré.

Ensuite, nous avons choisi un objet initial et des défauts non-convexes pour appuyer le fait que ce n'est pas une hypothèse nécessaire. En particulier, on pourra ainsi distinguer une reconstruction de l'enveloppe convexe des défauts d'une reconstruction correcte, ce qui n'est pas le cas avec des défauts trop simples. Par ailleurs, les défauts sont non-connexes. En effet, comme pour la convexité, la connexité ne fait pas partie des hypothèses nécessaires sur la géométrie. Mais surtout, en considérant des défauts non-connexes on tient compte des interactions qu'ils engendrent. En effet, la diffraction produite par l'un n'est pas négligeable au voisinage du second s'ils sont suffisamment proches par rapport à la longueur d'onde. Finalement, nous avons aussi choisi deux défauts de tailles distinctes afin d'exhiber plus clairement d'éventuels liens avec la longueur d'onde.

### 3.4.2 Génération des données

Pour calculer les valeurs des fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  aux points  $z_i$ , il faut disposer des données  $u_{n_j}^\infty$  ( $j = 0, 1$ ) et des fonctions tests  $u_{n_0}(\cdot, z_i)$ . Le nombre de points de “sampling”  $N_p$  est fixé ici à 6500.

#### Éviter l’“inverse crime”

Tout d'abord, retrouver des paramètres en certains points à partir de données générées exactement sur les mêmes points pourrait conduire à un problème trivial. Ce cas particulier est appelé “inverse crime” dans [Colton & Kress 1998] et étudié plus en détail dans [Wirgin 2004]. Aussi, pour éviter cette possibilité, l'ensemble des points de reconstruction  $\{z_i\}_{i=1, \dots, N_p}$  est choisi indépendamment des maillages servant à générer les données. De même, comme on considère l'objet avant et après perturbation, on utilisera deux maillages indépendants : l'un avec les défauts et l'autre sans.

#### Borner le domaine de calcul pour résoudre l'équation de Helmholtz

Par ailleurs, le système (1.1)-(1.5) définissant  $u_{n_0}(\theta, \cdot)$  est posé sur  $\mathbb{R}^d$  tout entier. Il faut donc se ramener à un domaine de calcul borné et il existe plusieurs méthodes pour ce faire. Tout d'abord, dans tout ouvert contenant les objets diffractants, les solutions peuvent être représentées par des potentiels volumiques (1.14). On peut donc les calculer par une méthode d'éléments finis dans un domaine de calcul borné pour peu qu'on fixe une condition de bord. Pour implémenter directement la condition de radiation sur le bord du domaine de calcul, il faudrait par définition qu'il soit très éloigné des objets diffractants, ce qui donnerait trop d'inconnues à calculer. Il existe alors des méthodes pour calculer une condition de bord absorbante (“absorbing boundary condition”) permettant de simuler un domaine non borné dans l'espace [Clayton & Engquist 1980]. Par ailleurs, en dehors du support des objets diffractants, les solutions peuvent aussi être représentées par des potentiels surfaciques. On peut alors calculer la solution sur une surface en résolvant des équations intégrales, ce qui donne une condition au bord “exacte” pour calculer la solution dans le volume à l'intérieur de cette surface. Le couplage équations intégrales/éléments finis est

présenté dans [Yuan *et al.* 1990] et un exemple en est la méthode de Nyström, démocratisée par [Kirsch & Monk 1994]. Cependant, l'évaluation des conditions au bord débouche généralement sur des matrices pleines et donc des problèmes coûteux. Une autre approche est alors celle des "Perfectly Matched Layers" (PML) [Berenger 1994]. Le principe est d'envelopper le domaine de calcul d'une couche dans laquelle on fait tendre la solution exponentiellement vers 0. Ainsi, quelle que soit la condition de bord fixée sur l'extérieur de la couche absorbante, l'amplitude de ce qui n'est pas absorbé est négligeable par rapport à l'erreur intrinsèque de la méthode d'éléments finis. La solution est donc correcte au sens des éléments finis jusqu'à la couche PML. L'avantage est qu'on ne considère qu'un seul problème d'éléments finis. Il en découle que, même si on ajoute un certain nombre d'inconnues pour peupler la couche PML, le problème débouche toujours sur des matrices très creuses et le surcoût calculatoire est négligeable.

Nous obtenons donc une approximation des valeurs de  $u_{n_0}(\theta, \cdot)$  par une discrétisation en éléments finis  $P^1$  sur la géométrie représentée en Figure 2.1 avec une implémentation des PML cartésiennes [Dah 2001]. Le domaine de calcul entouré par la couche PML est représenté dans la Figure 3.6. Le maillage final de ce domaine de calcul est raffiné de telle sorte que l'on ait une dizaine de mailles par longueur d'onde et environ une longueur d'onde entre l'objet diffractant et le début de la couche PML. La couche PML est elle-même dimensionnée pour avoir la longueur d'onde comme épaisseur.

**Remarque 3.14.** *Des algorithmes de résolution rapide pour l'équation de Lippmann-Schwinger (1.14), qui caractérise les solutions de l'équation de Helmholtz, sont proposés dans [Vainikko 2000] et [Bruno & Hyde 2004, Hyde & Bruno 2005]. Cependant, en deux dimensions d'espace nous obtenons des résultats rapides et satisfaisants avec la méthode des PML qui est facile à implémenter. C'est donc cette méthode que nous utilisons pour tous les exemples présentés ici.*

### Générer des données de champ lointain et des fonctions tests

Une fois les valeurs de champ proche calculées, nous pouvons alors calculer les valeurs de champ lointain en considérant l'asymptotique de l'équation de Lippman-Schwinger (1.14). Ce calcul peut être rendu plus précis, comme par exemple dans [Monk & Süli 1999], mais l'implémentation directe de l'asymptotique de (1.14) donne des résultats suffisants pour notre étude. Par ailleurs, dans toutes les simulations un bruit uniforme (donné en %) est ajouté aux valeurs du champ lointain effectif  $u_{n_1}^\infty$ , correspondant aux mesures.

Ensuite, les valeurs des fonctions tests aux points de reconstructions  $u_{n_0}(\cdot, z_i)$  sont obtenues par interpolation à partir de l'approximation calculée sur le maillage servant à la simulation des données.

Les ensembles de directions de mesures ( $\Gamma_m$ ) et d'émissions ( $\Gamma_e$ ) sont représentés sur les figures suivantes par une portion de cercle gris foncé entourant l'objet avec une flèche sortante pour ( $\Gamma_m$ ) et une flèche entrante pour ( $\Gamma_e$ ).



## 3.4.3 Comparaison des méthodes en présence d'un fort bruit des mesures

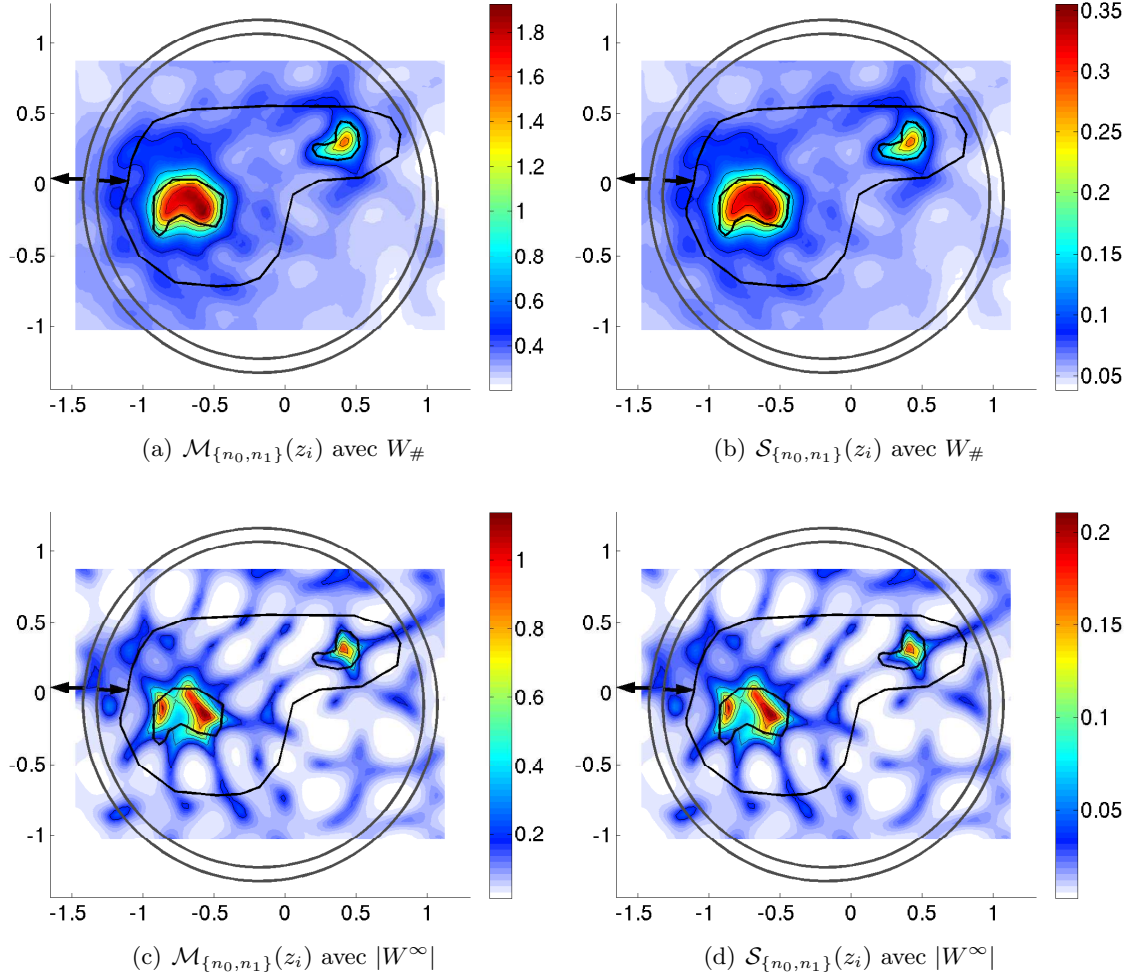


FIGURE 3.7: Comparaison des méthodes avec 20% de bruit.

- $k = 10$
- $\Gamma_e = \Gamma_m = [0, 2\pi]$  avec 35 directions d'émissions/mesures
- $n_0$  prend ses valeurs dans  $[1.33, 1.41]$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.95, 2.01]$  dans  $\Omega$

La Figure 3.7 compare les résultats obtenus avec 20% de bruit ajouté aux mesures pour les fonctions  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  en considérant comme opérateur de mesure d'abord  $W_{\#}$  puis  $|W^{\infty}|$ .

A titre d'exemple, l'évaluation de la fonction  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  sur les 6231 points de "sampling" a demandé 0.10 secondes et l'évaluation de la fonction  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$  en a demandé 0.06. Ceci est à comparer aux 0.86 secondes demandées par la résolution du problème direct pour avoir les valeurs de  $u_{n_0}$  avec 35 directions d'émission et 12000 degrés de liberté (qu'on interpolera ensuite sur les points  $z_i$ ).

Tout d'abord, on remarque que toutes les méthodes employées sont très peu sensibles au



bruit de mesures. Ceci est très intéressant sur le plan applicatif.

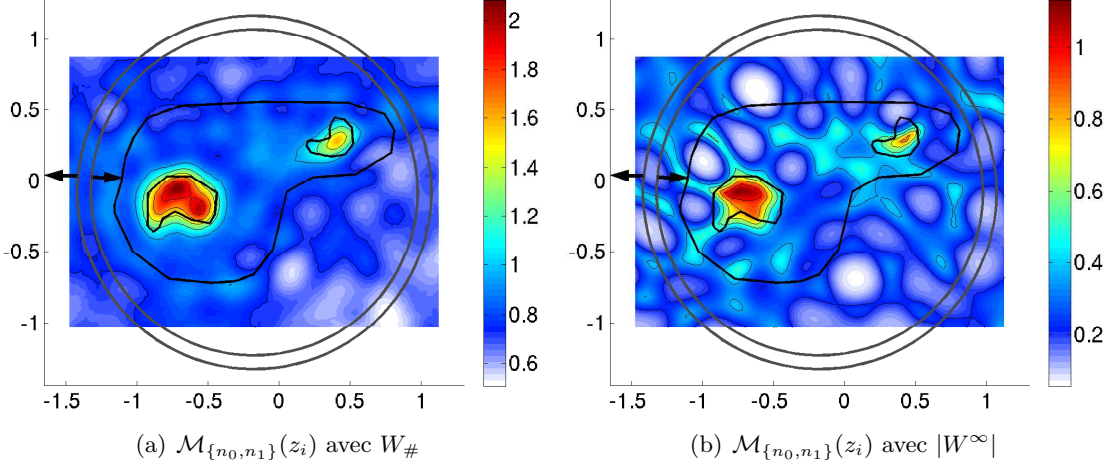


FIGURE 3.8: Comparaison des méthodes avec 50% de bruit.

- $k = 10$
- $\Gamma_e = \Gamma_m = [0, 2\pi]$  avec 35 directions d'émissions/mesures
- $n_0$  prend ses valeurs dans  $[1.33, 1.41]$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.95, 2.01]$  dans  $\Omega$

Les reconstructions avec un bruit ajouté aux mesures allant jusqu'à 50% continuent de localiser clairement la position et la taille des deux défauts. Seule la forme est de moins en moins exacte, comme présenté sur la Figure 3.8.

Ensuite, on constate que prendre  $|W^\infty|$  comme opérateur de mesures permet, au moins numériquement, de localiser précisément les défauts même dans un exemple non trivial. Les caractères non-connexe et non-convexe des défauts ne sont pas tout à fait effacés, malgré le fort bruitage des données. Cependant, les reconstructions avec l'opérateur  $|W^\infty|$  sont ici visiblement moins contrastées que leurs homologues avec l'opérateur  $W_\#$ . Par contre, lorsque le bruit ajouté aux mesures est faible, comme dans les illustrations suivantes où il sera fixé à 2%, le choix de l'opérateur et de la méthode employée n'a pas d'impact sensible sur le résultat.

#### 3.4.4 Sensibilité des méthodes à la fréquence des sources ondes planes

Même si aucune hypothèse n'est faite sur la longueur d'onde des sources employées, on s'attend à ce que les défauts risquent de ne pas être détectés s'ils sont trop petits par rapport à cette longueur d'onde. L'objet diffractant a un diamètre de 2, le gros défaut a un diamètre de 0.5 et le petit de 0.3. Ainsi, pour  $k=1$ , la longueur d'onde  $\lambda := \frac{2\pi}{k}$  vaut  $\lambda = 6.28$ . L'objet en lui-même est donc trois fois plus petit que la longueur d'onde, le gros défaut douze fois et le petit vingt-et-une fois. Les défauts sont donc très petits par rapport à la longueur d'onde.

La Figure 3.9(b) présente les valeurs de  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  pour  $k = 1$  mais on obtient le même

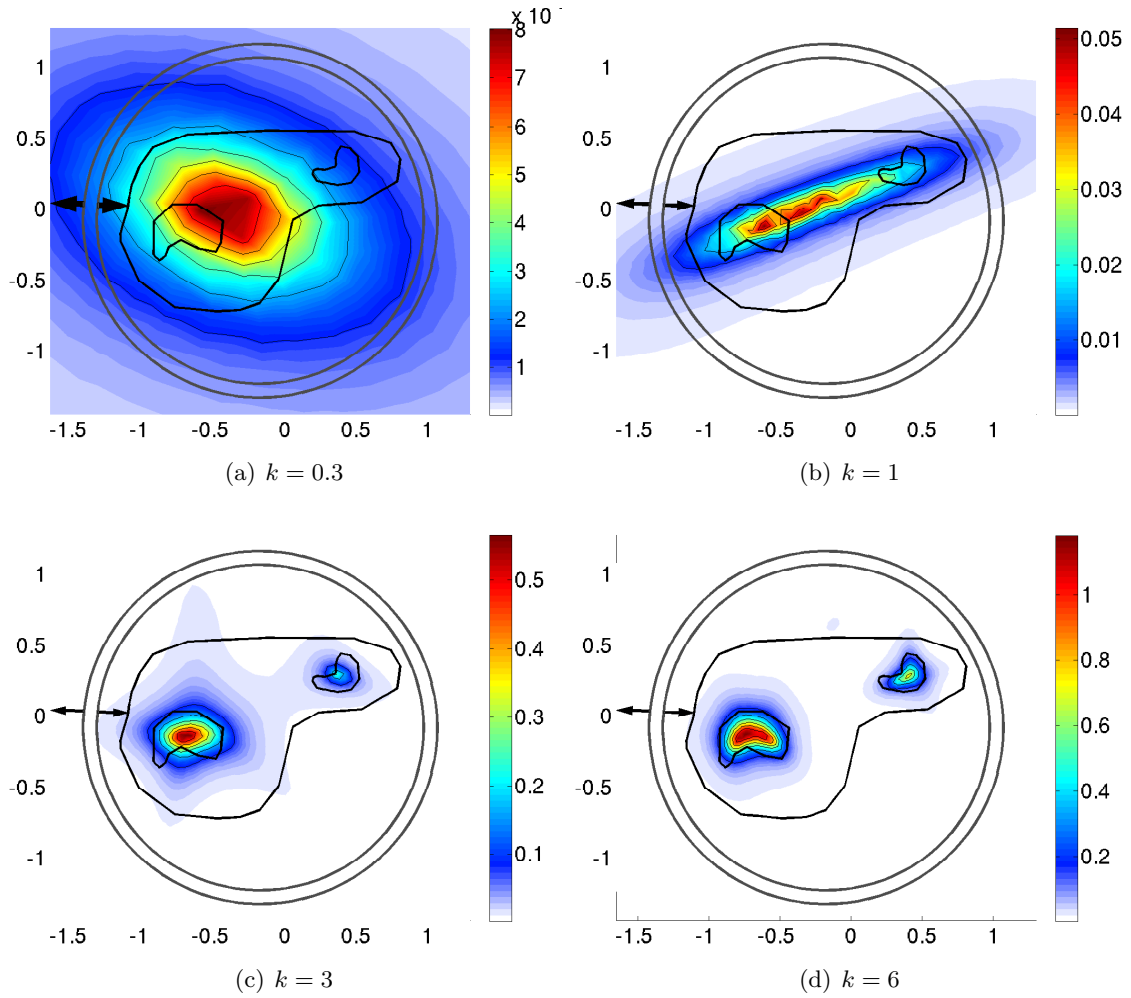


FIGURE 3.9: Sensibilité à la fréquence.

- $\Gamma_e = \Gamma_m = [0, 2\pi]$  avec 35 directions d'émissions/mesures
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- $n_0$  prend ses valeurs dans  $[1.33, 1.41]$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.95, 2.01]$  dans  $\Omega$

résultat avec  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}$ . On constate que la présence de défauts est détectée mais la forme n'est absolument pas reconstituée. En effet, le gros défaut est localisé mais sa forme ne peut être reconstituée par aucune de nos méthodes. Le petit défaut, quant à lui, n'est même pas localisé. On remarque seulement qu'il pondère les résultats de manière à étirer vers lui la zone indiquant la présence du gros défaut.

En augmentant le nombre d'onde à  $k = 3$  on obtient  $\lambda = 2.1$ . La longueur d'onde correspond donc à la longueur caractéristique de l'objet. Le gros défaut est alors quatre fois plus petit que la longueur d'onde et le petit défaut est six fois plus petit. On voit sur la Figure 3.9(c) que ceci est suffisant pour localiser chaque défaut. Le caractère non-connexe est reconstruit. Cependant, les défauts semblent encore trop petits (ou la fréquence des émissions est trop basse) pour qu'on puisse reconstruire leur forme précisément et aucune de nos méthodes ne semble se démarquer sur ce critère. Ce n'est qu'à partir de  $k = 6$ , quand  $\lambda = 1$  et que la taille des défauts est de l'ordre d'une demi longueur d'onde, que leur forme commence à être correctement restituée comme illustré sur la Figure 3.9(d).

Contrairement au résultat théorique, mais conformément à nos suppositions, la taille des observables en pratique semble donc conditionnée par la longueur d'onde utilisée lors des mesures. En effet, nos méthodes de reconstruction de la forme de défauts semblent efficaces principalement pour des défauts dont la taille caractéristique est relativement proche de la longueur d'onde.

### 3.4.5 Sensibilité des méthodes au nombre de mesures/émissions

Pour une fréquence fixée, les résultats d'unicité du champ lointain par rapport à l'objet diffractant requièrent une infinité de mesures [Kirsch & Päiväranta 1998]. Sous certaines hypothèses, une seule direction d'émission peut suffire, mais il n'existe, à notre connaissance, aucun résultat d'unicité pour une seule fréquence, une seule direction d'émission et une seule direction de mesure [Colton & Kress 1998, Section 5.1]. Cependant, si on relâche le concept d'unicité pour ne demander qu'une caractérisation à  $\varepsilon$  près, un nombre fini de directions de mesures peut suffire [Potthast 1998]. Nous étudions alors ici l'incidence du nombre de directions d'émissions/réceptions sur la qualité des reconstructions.

La Figure 3.10(a) illustre clairement que 5 directions sont insuffisantes pour localiser le moindre défaut quelle que soit la méthode. À partir d'une dizaine de directions, on voit, comme sur la Figure 3.10(b), que les défauts sont localisés mais que le petit défaut n'est pas reconstitué correctement.

Nos méthodes nécessitent donc logiquement un certain nombre de mesures mais il semble qu'une dizaine suffise, au moins pour notre exemple, ce qui reste raisonnable.

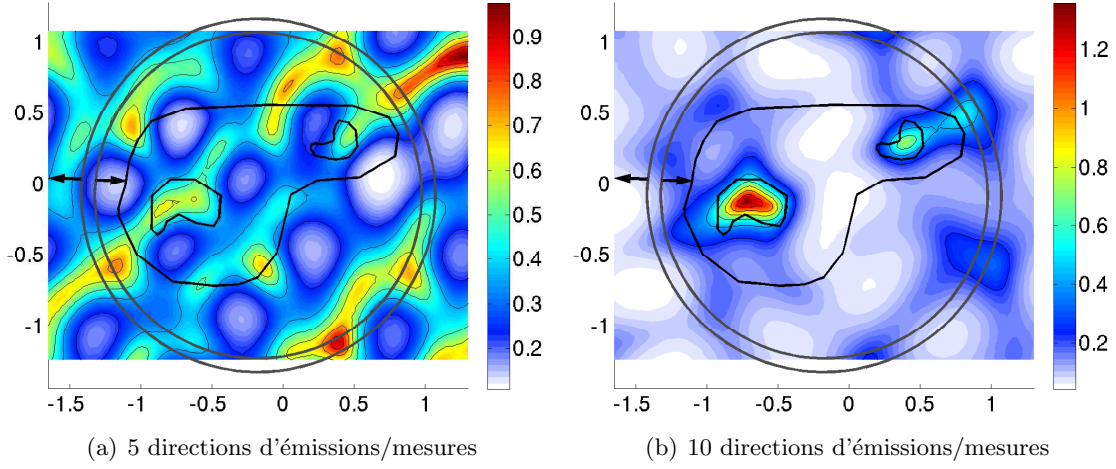


FIGURE 3.10: Sensibilité au nombre de directions d'émissions/mesures.

- $k = 6$
- $\Gamma_e = \Gamma_m = [0, 2\pi]$
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- $n_0$  prend ses valeurs dans  $[1.33, 1.41]$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.95, 2.01]$  dans  $\Omega$

### 3.5 Extension des algorithmes

Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement aux possibilités offertes par la conjecture présentée à la Section 3.3. Les fonctions de localisation des défauts  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)$  et  $\mathcal{S}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)$ , définies respectivement aux Théorèmes 3.8 et 3.10, ne sont alors plus construites qu'avec l'opérateur de mesures  $|W^\infty|$  (3.19). Comme l'utilisation de l'opérateur  $|W^\infty|$  le permet, nous étudions les réponses de ces fonctions dans le cadre d'indices complexes et d'ensembles de directions de mesures  $\Gamma_m$  et d'émissions  $\Gamma_e$  distincts. Finalement, nous présentons les résultats obtenus pour la détection de défauts quand le milieu ambiant n'est pas connu parfaitement pour nous rapprocher de conditions réalistes.

#### 3.5.1 Sensibilité à l'absorption

Nous étudions ici le comportement de nos méthodes en présence d'indices à valeurs complexes, représentant des matériaux absorbants.

Avec une faible absorption du milieu ambiant on voit sur les Figures 3.11 et 3.12 que les résultats varient peu par rapport aux cas avec des indices à valeurs réelles. Nos deux méthodes offrent une reconstruction satisfaisante de la forme des défauts, quel que soit l'opérateur de mesures considéré.

Inversement, les Figures 3.13 et 3.14 indiquent que nos méthodes échouent à reconstruire la forme des défauts quand le milieu ambiant est assez absorbant. Cependant, quand la partie

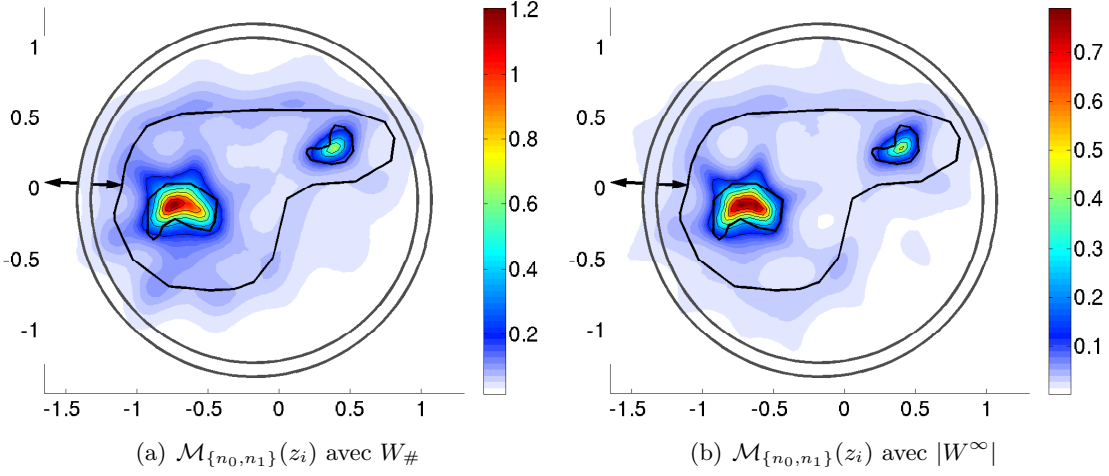


FIGURE 3.11: Comparaison des méthodes avec une faible absorption dans l'objet et dans les défauts.

- $k = 6$
- $\Gamma_e = \Gamma_m = [0, 2\pi]$  avec 35 directions d'émissions/mesures
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- $n_0$  prend ses valeurs dans  $[2.23, 2.38] + [0.01, 0.08]i$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.78, 1.88] + [0.12, 0.18]i$  dans  $\Omega$

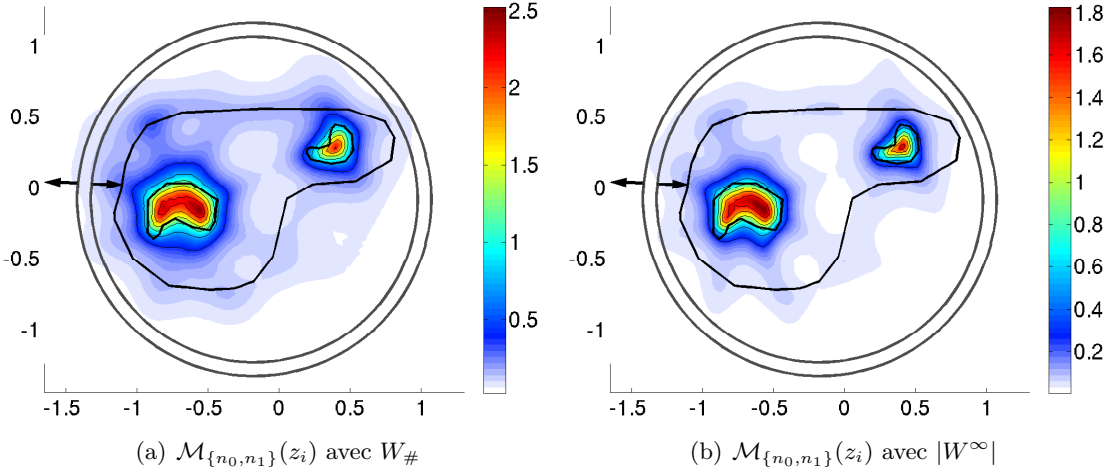


FIGURE 3.12: Comparaison des méthodes avec une absorption faible dans l'objet mais forte dans les défauts.

- $k = 6$
- $\Gamma_e = \Gamma_m = [0, 2\pi]$  avec 35 directions d'émissions/mesures
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- $n_0$  prend ses valeurs dans  $[2.23, 2.38] + [0.01, 0.08]i$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.78, 1.88] + [2.43, 2.48]i$  dans  $\Omega$

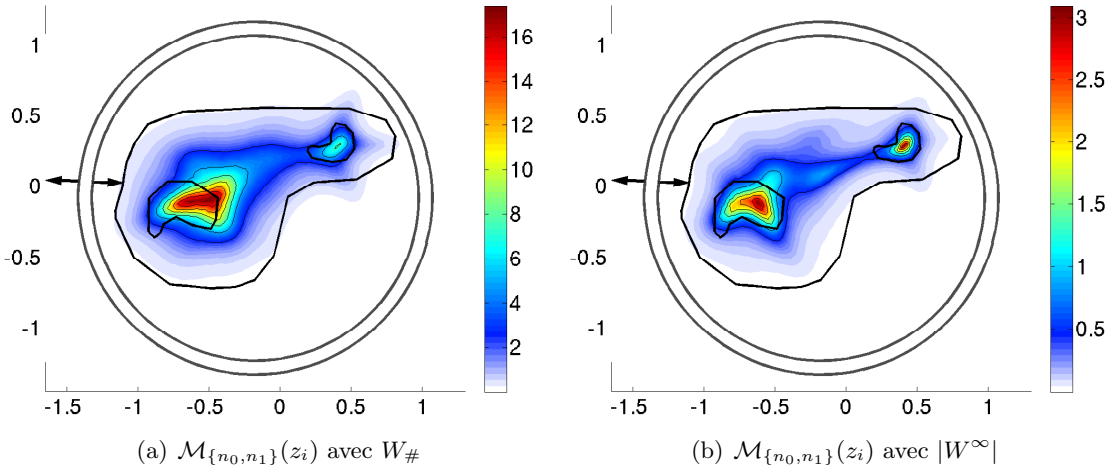


FIGURE 3.13: Comparaison des méthodes avec une absorption forte dans l'objet mais faible dans les défauts.

- $k = 6$
- $\Gamma_e = \Gamma_m = [0, 2\pi]$  avec 35 directions d'émissions/mesures
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- $n_0$  prend ses valeurs dans  $[2.41, 2.51] + [2.02, 2.23]i$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.95, 2.01] + [-0.12, 0.03]i$  dans  $\Omega$

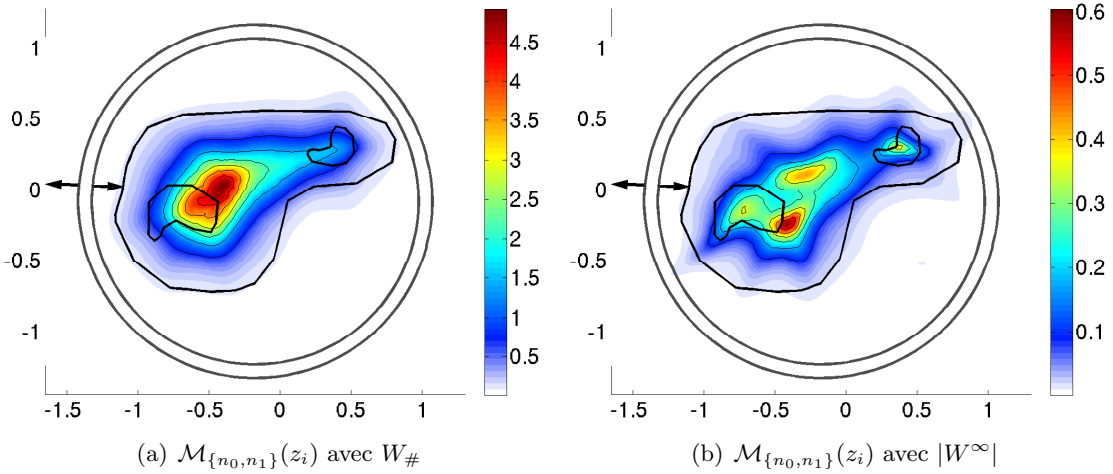


FIGURE 3.14: Comparaison des méthodes avec une absorption forte dans l'objet et les défauts.

- $k = 6$
- $\Gamma_e = \Gamma_m = [0, 2\pi]$  avec 35 directions d'émissions/mesures
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- $n_0$  prend ses valeurs dans  $[2.41, 2.51] + [2.02, 2.23]i$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.95, 2.01] + [1.88, 2.03]i$  dans  $\Omega$

imaginaire de l'indice des défauts est contrastée par rapport à celle du milieu, comme sur la Figure 3.13, les défauts sont localisés mais le caractère non-connexe n'est pas restitué de manière satisfaisante. Quand l'absorption des défauts n'est pas suffisamment contrastée avec celle du milieu, la Figure 3.14 indique que nos méthodes localisent une sorte de défaut moyen mais ne reconstruisent ni la forme, ni le caractère non-connexe des défauts.

Il n'a été démontré pour aucune des quatre fonctions représentées ici qu'elles puissent caractériser le support des défauts dans le cadre d'indices à valeurs complexes. Cependant, les résultats obtenus semblent indiquer que cette limitation est plus technique que fondamentale. En particulier, comme pour les exemples précédents, la fonction  $\mathcal{M}_{\{n_0, n_1\}}$  construite avec l'opérateur de mesures  $|W^\infty|$  donne de très bon résultats quand l'absorption ambiante est faible. Les résultats obtenus dans le cas d'une forte absorption ambiante appellent plutôt une interprétation physique. En effet, la forte absorption ambiante réduit naturellement l'amplitude des ondes traversant l'objet. Et ce sont précisément ces ondes qui transportent l'information sur les défauts. Il n'est donc pas surprenant que la reconstruction précise de la forme des défauts soit plus difficile.

### 3.5.2 Indices complexes et directions de mesures distinctes des directions d'émissions

Nous avons indiqué dans la Section 3.3 que l'opérateur  $|W^\infty|$  est parfaitement défini pour des indices à valeurs réelles et surtout des directions de mesures distinctes des directions d'émissions. Dans ce cadre, l'opérateur  $W_\#$  n'a plus de sens et sa représentation matricielle ne peut plus être construite. En particulier, les méthodes de "Factorization" classiques basées sur la factorisation de l'opérateur de champ lointain ne peuvent pas traiter ce cas de figure. Comme le champ lointain est analytique, il suffit donc de le connaître sur un ouvert pour le connaître sur la sphère unité toute entière. Cependant, dans la pratique, les résultats obtenus par les méthodes de sampling se dégradent généralement fortement quand les mesures sont prises sur des secteurs angulaires inférieurs à  $\pi$  (en 2D).

Nous étudions alors le comportement de nos méthodes en fonction du secteur angulaire sur lequel un nombre constant de mesures sera considéré. A l'utilisation de données incomplètes nous ajoutons l'utilisation d'ensembles de directions de mesures et d'émissions distincts.

Nous n'étudions alors plus que les résultats obtenus en considérant l'opérateur de mesures  $|W^\infty|$  qui lui, reste parfaitement défini.

Comme on pouvait s'y attendre, on voit sur la Figure 3.15 que nos méthodes sont particulièrement sensibles à l'ouverture angulaire de l'ensemble des directions de mesures. Ce n'est qu'à partir d'une ouverture d'environ  $\pi$ , comme sur la Figure 3.15(c), qu'on peut commencer à reconstruire la forme des défauts. Dans le but de rendre les données plus exploitables, des travaux sont menés pour enrichir les mesures du champ lointain à partir de données incomplètes [Barucq *et al.* 2010]. Ceci fournirait ainsi des données complètes aux algorithmes de reconstruction et améliorerait grandement la qualité des reconstructions. Cependant, le caractère analytique du champ lointain fait que ce problème inverse est particulièrement mal conditionné et donc très difficile à résoudre.



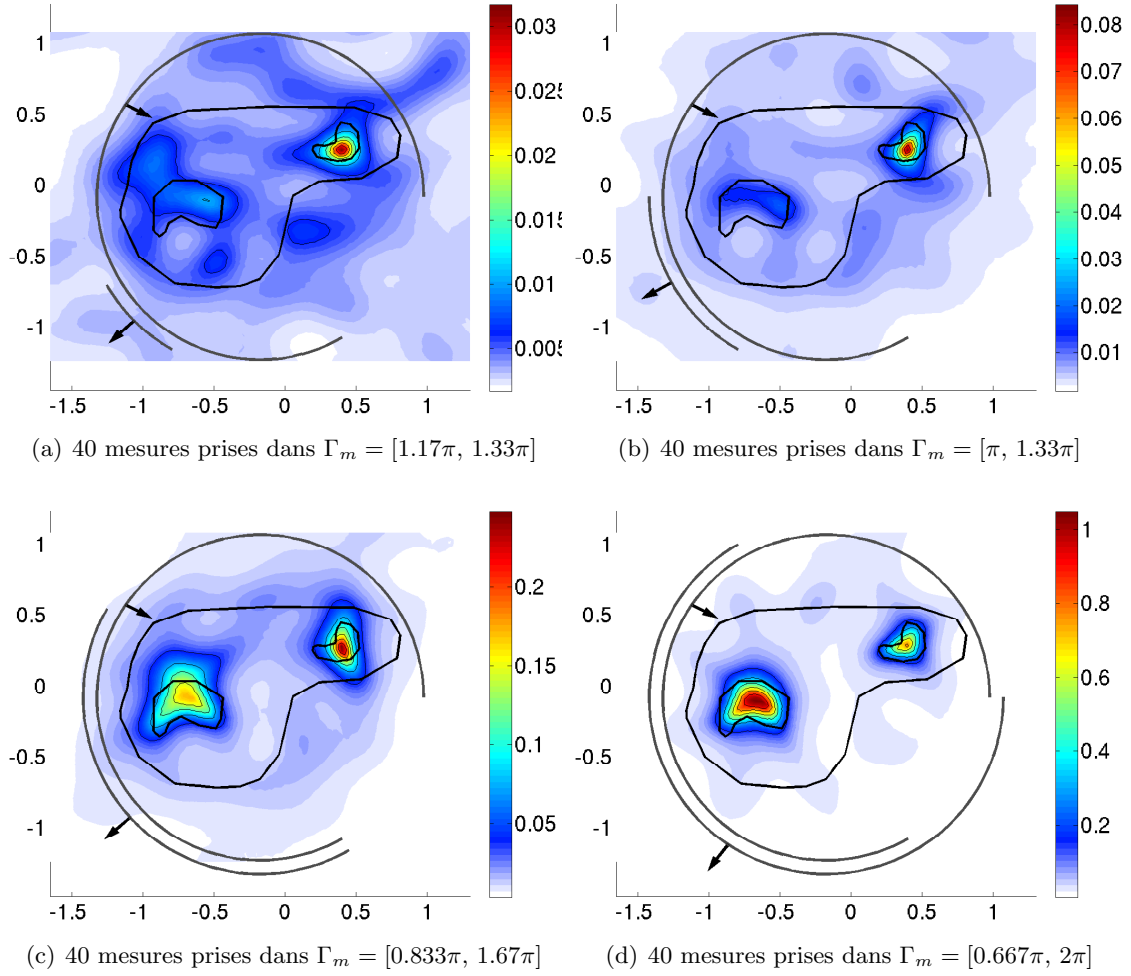


FIGURE 3.15: Sensibilité à l'ouverture de l'ensemble des mesures.

- $k = 6$
- $\Gamma_e = [0, 1.67\pi]$  avec 35 directions d'émissions
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- $n_0$  prend ses valeurs dans  $[1.53, 1.63] + [0.07, 0.12]i$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[2.26, 2.33] + [0.48, 0.52]i$  dans  $\Omega$



### 3.5.3 Sensibilité des méthodes à la précision de la connaissance du milieu ambiant

En visant des applications réalistes, il est envisageable que l'indice du milieu ambiant qui sert de référence et dans lequel on cherche des défauts soit connu de manière imparfaite. On peut par exemple ne disposer que d'une valeur homogénéisée, ou de valeurs mesurées et donc soumises à une certaine imprécision. Théoriquement, toute imprécision sur les valeurs de l'indice du milieu devrait être rapporté comme un défaut. Nous étudions alors ici le comportement de nos méthodes quand les valeurs de  $u_{n_0}^\infty$  utilisées pour construire l'opérateur de mesures et les valeurs de  $u_{n_0}(\cdot, z_i)$  utilisées comme fonctions tests sont construites à partir d'un indice faiblement perturbé.

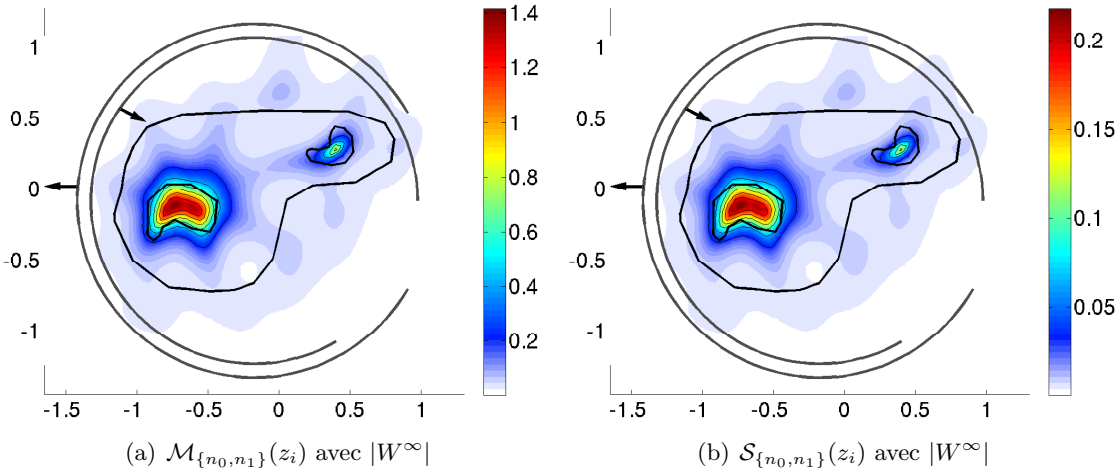


FIGURE 3.16: Comparaison des méthodes avec une valeur de  $n_0$  constante fixée à 100% de la moyenne de l'indice du milieu ambiant.

- $k = 6$
- $\Gamma_e = [0\pi, 1.67\pi]$  avec 35 directions d'émissions
- $\Gamma_m = [0.167\pi, 1.83\pi]$  avec 40 directions de mesures
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- Valeur constante utilisée en pratique pour  $n_0$  dans  $D$  :  $1.61+0.11i$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.53, 1.63] + [0.07, 0.12]i$  dans  $D \setminus \Omega$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[2.26, 2.33] + [0.48, 0.52]i$  dans  $\Omega$

Pour les exemples précédents, nous avons d'abord fixé les valeurs de l'indice de référence  $n_0$ . Ensuite, nous avons fait une copie notée  $n_1$  de cet indice et finalement nous avons modifié les valeurs de  $n_1$  dans une certaine zone, créant ainsi des défauts. Pour les Figures 3.16, 3.17, 3.18 et 3.19 nous avons procédé de même mais ensuite nous avons aussi modifié les valeurs de  $n_0$  dans  $D$  tout entier.

La Figure 3.16 illustre le résultat obtenu quand les valeurs de  $n_0$  sont remplacées (dans  $D$ ) par une constante qui est la moyenne des anciennes valeurs de  $n_0$ . On voit que les reconstructions ont perdu en contraste mais le résultat reste bon. Si cette constante s'écarte de la moyenne de l'indice du milieu ambiant, comme sur les Figures 3.17 et 3.18, on constate une dégradation des résultats à partir de 4% d'écart entre la constante choisie et

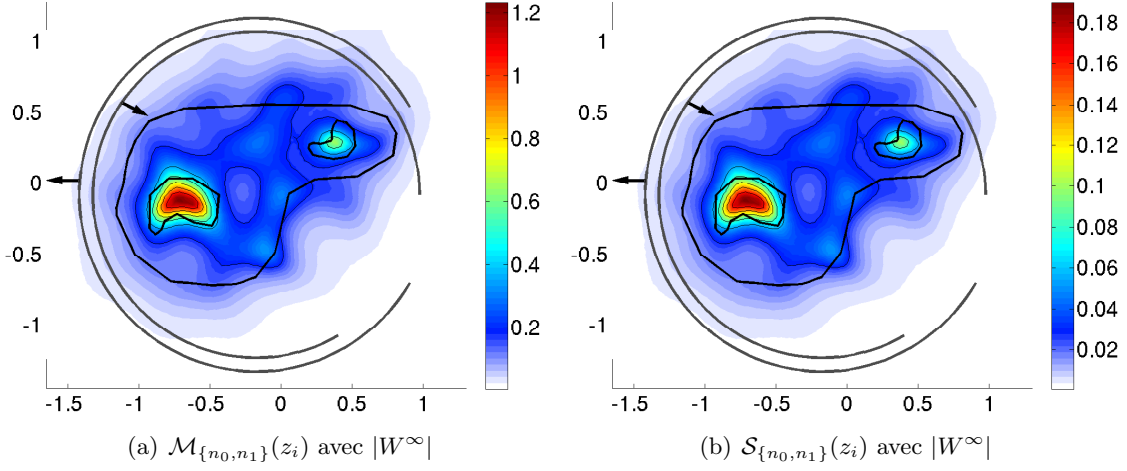


FIGURE 3.17: Comparaison des méthodes avec une valeur de  $n_0$  constante fixée à 103% de la moyenne de l'indice du milieu ambiant.

- $k = 6$
- $\Gamma_e = [0\pi, 1.67\pi]$  avec 35 directions d'émissions
- $\Gamma_m = [0.167\pi, 1.83\pi]$  avec 40 directions de mesures
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- Valeur constante utilisée en pratique pour  $n_0$  dans  $D$  :  $1.65 + 0.11i$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.53, 1.63] + [0.07, 0.12]i$  dans  $D \setminus \Omega$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[2.26, 2.33] + [0.48, 0.52]i$  dans  $\Omega$

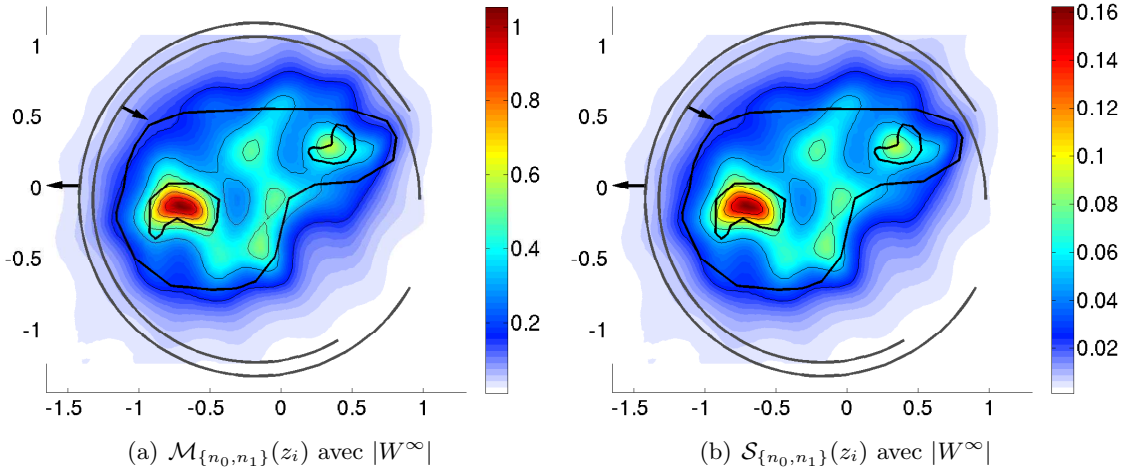


FIGURE 3.18: Comparaison des méthodes avec une valeur de  $n_0$  constante fixée à 105% de la moyenne de l'indice du milieu ambiant.

- $k = 6$
- $\Gamma_e = [0\pi, 1.67\pi]$  avec 35 directions d'émissions
- $\Gamma_m = [0.167\pi, 1.83\pi]$  avec 40 directions de mesures
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- Valeur constante utilisée en pratique pour  $n_0$  dans  $D$  :  $1.69 + 0.11i$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[1.53, 1.63] + [0.07, 0.12]i$  dans  $D \setminus \Omega$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[2.26, 2.33] + [0.48, 0.52]i$  dans  $\Omega$

la moyenne exacte.

Nos méthodes permettent donc de reconstruire la forme de défauts à partir de mesures en présence de défauts et d'une version homogénéisée de l'indice du milieu ambiant pour peu qu'elle reste proche de la moyenne exacte. Ceci peut paraître surprenant puisque, en modifiant l'indice  $n_0$  dans tout le domaine  $D$ , l'indice  $n_1$  diffère de  $n_0$  dans tout  $D$  et on devrait donc reconstruire la forme de l'objet entier au lieu des défauts. Cependant, ce comportement peut s'expliquer par la différence de contraste entre la modification de  $n_0$  et le défaut étudié ici par rapport à l'indice de référence. En effet, sur la Figure 3.16 par exemple, la partie réelle de  $n_0$  vaut 1.6 et la partie réelle de  $n_1$  varie entre 1.5 et 1.6 dans  $D \setminus \Omega$  alors qu'elle varie entre 2.2 et 2.3 dans  $\Omega$ . Le contraste entre le défaut et l'indice de référence est donc largement supérieur à celui entre l'indice de référence en dehors du défaut et l'indice utilisé en pratique. Or, on a vu à la Remarque 2.22 que la détection des défauts nécessitait l'Hypothèse 2.16 d'un certain contraste entre les défauts et l'indice de référence. L'application numérique de nos méthodes de reconstruction semble donc privilégier la reconstruction des zones ayant le plus fort contraste avec l'indice de référence.

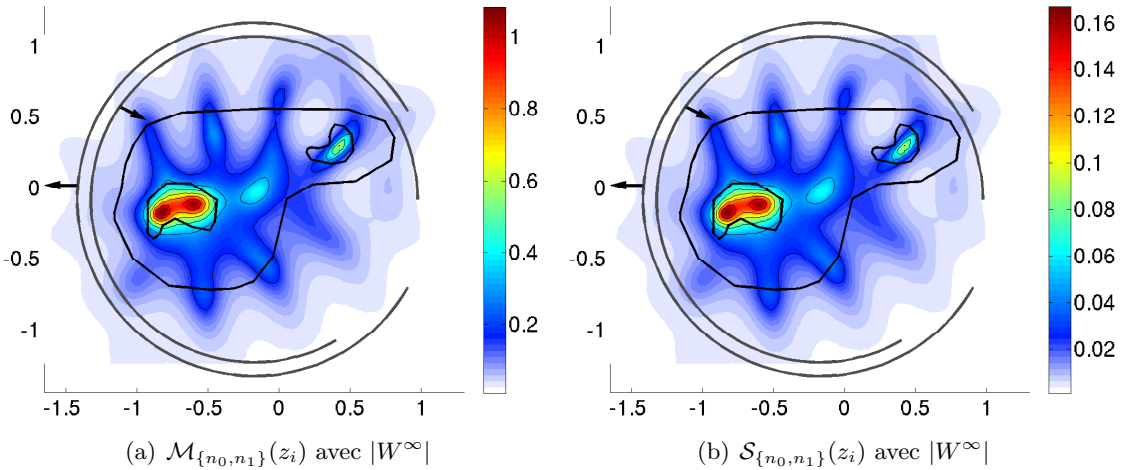


FIGURE 3.19: Comparaison des méthodes avec 50% de bruit ajouté aux valeurs de  $n_0$ .

- $k = 6$
- $\Gamma_e = [0\pi, 1.67\pi]$  avec 35 directions d'émissions
- $\Gamma_m = [0.167\pi, 1.83\pi]$  avec 40 directions de mesures
- 2% de bruit ajouté aux mesures
- Les valeurs exactes pour  $n_0$  sont prises dans  $[0.796, 2.43] + [0.0412, 0.178]i$  dans  $D$
- $n_1$  prend ses valeurs dans  $[2.26, 2.33] + [0.483, 0.521]i$  dans  $\Omega$

La situation semble bien meilleure quand considère une version de l'indice de référence bruitée uniformément. En effet, dans la plupart des cas, jusqu'à 10% de bruit ajouté aux valeurs de l'indice de référence ne perturbent pas sérieusement la reconstruction. Même avec 50% de bruit ajouté, comme on peut en voir un exemple représentatif sur la Figure 3.19, les défauts sont correctement localisés. Nos méthodes semblent donc être très peu sensibles aux incertitudes par rapport aux valeurs de l'indice de référence quand les défauts sont suffisamment contrastés. Ceci laisse présager un bon comportement dans des

applications pratiques.

**Remarque 3.15.** *Nos méthodes de reconstitution de défauts ont été construites en supposant l'indice de réfraction du milieu ambiant  $n_0$  connu. Ainsi, les données  $u_{n_0}^\infty$  peuvent être calculées et les fonctions tests  $u_{n_0}(\cdot, z_i)$  peuvent être interpolées sur l'ensemble des points de “sampling”  $\{z_i\}_{i=1, \dots, N_p}$ .*

*Mais on pourrait se placer dans le cas les valeurs de  $u_{n_0}^\infty$  ne sont connues que par des mesures, comme c'est le cas pour  $u_{n_1}^\infty$ . C'est le cas par exemple quand on fait du suivi d'objets en mouvement : on peut faire des mesures avant et après un mouvement sans connaître l'indice de réfraction de la scène avant mouvement. En raison de la faible sensibilité de nos méthodes par rapport aux incertitudes sur les valeurs de  $n_0$ , on peut espérer de bons résultats quand  $u_{n_0}^\infty$  n'est connu que par des mesures. Ainsi, on peut élargir le cadre d'application de nos algorithmes en y incorporant le problème inverse qui consiste en l'approximation des fonctions tests  $u_{n_0}(\cdot, z_i)$  à partir des valeurs (mesurées) de  $u_{n_0}^\infty$ . Ceci peut par exemple être traité par des équations de potentiels, comme indiqué dans [Colton & Kress 2006]. En effet, les résultats présentés sur la Figure 3.19 laissent espérer de bons résultats avec des fonctions tests approchées.*



---

## Localisation de défauts et reconstruction d'indices

---

A partir des mesures en champ lointain de la diffraction d'ondes planes par un objet, nous souhaitons maintenant déterminer son indice de réfraction. On cherche à retrouver cet indice en minimisant l'écart dans une certaine norme  $X$  entre le champ lointain simulé  $\mathcal{F}(n)$  et les mesures  $u^\infty$ , soit trouver  $n^*$  défini par

$$n^* := \operatorname{argmin}_{n \in L^\infty(D)} \|\mathcal{F}(n) - u^\infty\|_X^2.$$

Ceci est un problème aux moindres carrés non-linéaire et mal posé que nous traitons par une méthode de Gauss-Newton régularisée. Pour ce faire, nous considérons la régularisation de Tikhonov avec la norme  $L^2(D)$  classique et la régularisation en semi-norme  $BV$ , très utilisée en particulier pour la reconstruction d'image (voir par exemple [Vogel & Oman 1996, Vogel & Oman 1998, Chan & Chen 2006, Osher *et al.* 2006]).

Dans son fonctionnement, la méthode de Gauss-Newton est un processus itératif qui essaie de déterminer un extremum local d'un problème aux moindres carrés. Pour ce faire, partant d'un indice notée  $n_p$  à l'étape  $p$  de l'algorithme, on détermine une direction de descente permettant de définir une nouvelle carte de valeurs  $n_{p+1}$  qui réduit la fonction coût étudiée. Le but de cet algorithme est de créer une suite d'indices  $n_p$  qui converge vers un minimiseur  $n^*$  de cette fonction coût. Dans le cas optimal,  $n^*$  représente l'indice que l'on souhaite reconstruire. D'autre part, la différence entre la reconstruction  $n_p$  à l'étape  $p$  et  $n^*$  peut être vue comme un défaut (de  $n_p$  par rapport à  $n^*$ ). Ainsi, par la méthode de détection de défauts introduite au Chapitre 3 nous avons une information locale sur l'adéquation entre une reconstruction  $n_p$  et l'indice recherché  $n^*$ . L'objectif de ce chapitre est alors de présenter des améliorations de la méthode de Gauss-Newton par son couplage avec des méthodes de détection de défauts développées au Chapitre 3.

Pour la première partie, nous proposons une stratégie de réduction du nombre de variables d'optimisation par sélection des zones d'intérêt pour le processus itératif de reconstruction.

---

Le principe est de ne faire varier que les sous-domaines de  $D$  dans lesquels les valeurs de l'indice courant  $n_p$  contrastent le plus avec les valeurs de l'indice recherché  $n^*$ . La sélection des sous-domaines sur lesquels faire évoluer les valeurs de  $n_p$  peut alors être dictée par les valeurs ponctuelles de la fonction de localisation des défauts entre  $n_p$  et  $n^*$  définie au Théorème 3.8 et notée  $\mathcal{M}_{\{n_p, n^*\}}(z)$ . Deux cas de figure sont illustrés numériquement pour valider cette approche.

Par ailleurs, nous avons vu au Chapitre 3 que la fonction  $\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(z)$  était comparable à  $\|\mathcal{F}(n) - u^\infty\|^2$  tout en donnant une information locale par rapport aux indices  $n$  et  $n^*$  comparés. Ainsi, dans la seconde partie nous proposons un nouveau terme de fidélité venant remplacer  $\|\mathcal{F}(n) - u^\infty\|^2$ . Au lieu de chercher l'indice en réduisant l'écart entre la simulation et les mesures, il est possible de chercher en réduisant les défauts entre l'indice proposé et l'indice recherché. On se propose alors de chercher alors à minimiser

$$\|\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}\|^2.$$

L'avantage de cette fonction coût est qu'on peut chercher à réduire les défauts sur n'importe quel sous-domaine de  $D$ . On espère ainsi pouvoir paralléliser le processus global de reconstruction.

## 4.1 La méthode de Gauss-Newton régularisée

L'objectif est de retrouver les valeurs d'un paramètre non constant à partir d'observations données en champ lointain, comme dans les chapitres précédents. En reprenant les notations du Chapitre 1, on note  $\mathcal{F} : L^\infty(D) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Gamma_e \times \Gamma_m)$  l'application qui donne le champ lointain  $u_n^\infty$  sur l'ensemble des directions d'émissions et de mesures  $\Gamma_e \times \Gamma_m$  en fonction de l'indice de réfraction  $n$  comme illustré sur la Figure 1.1

$$\mathcal{F}(n) := u_n^\infty. \quad (4.1)$$

**Remarque 4.1.** *L'indice de réfraction  $n \in L^\infty(D)$  est étendu trivialement par 1 en dehors de  $D$  pour définir  $u_n^\infty$ .*

Si  $u^\infty$  est le champ lointain mesuré, on cherche donc  $n^*$  tel que

$$\mathcal{F}(n^*) = u^\infty. \quad (4.2)$$

Cette équation possède une unique solution si la dimension spatiale  $d$  est égale à 3.

**Proposition 4.2** (Unicité de la solution). *[Ségué 2000, Théorème 2.2.1] Soient  $n_0$  et  $n_1 \in L^\infty(D)$  deux indices de réfraction normalisés à 1 en dehors de  $D$ , un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ . Si les champs lointains  $u_{n_0}^\infty(\theta, \hat{x})$  et  $u_{n_1}^\infty(\theta, \hat{x})$  coïncident sur  $\Gamma_e \times \Gamma_m$ , alors  $n_0 = n_1$ .*

Les valeurs du champ lointain sont donc suffisantes en théorie pour trouver l'indice de réfraction de l'objet observé. On peut aussi trouver un résultat antérieur pour des indices  $n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  dans [Kirsch 1996, Théorème 5.25].

**Remarque 4.3.** *A cette date nous n'avons pas connaissance de preuve pour le cas  $d = 2$ .*

### Quasi-solutions du problème considéré

En pratique, les mesures ne sont en général pas exactes et on ne dispose que d'une version bruitée  $u_\varepsilon^\infty$  du champ lointain. Toutefois, les mesures sont supposées assez proches, pour une certaine norme  $X$ , de la valeur exacte

$$\|u_\varepsilon^\infty - u^\infty\|_X \leq \varepsilon.$$

Malgré tout, la version perturbée  $u_\varepsilon^\infty$  peut ne plus être dans l'image de  $\mathcal{F}$  et le problème considéré devient alors la recherche d'un minimiseur de la fonctionnelle

$$J(n) := \|\mathcal{F}(n) - u_\varepsilon^\infty\|_X^2. \quad (4.3)$$

Un tel minimiseur  $n_\varepsilon$  de  $J$  est habituellement appelé quasi-solution de l'équation (4.2).

Bien sur, on s'attend à ce que le choix de la norme  $X$  utilisée pour définir les quasi-solutions influe directement sur le résultat obtenu. Par ailleurs, de nombreux résultats reposent sur le fait que l'application  $\mathcal{F}$  soit à valeurs dans un espace de Hilbert [Engl *et al.* 1996]. Or, il n'existe pas de structure Hilbertienne pour  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma_e \times \Gamma_m)$ . Un espace de Hilbert naturel contenant  $\mathcal{R}(\mathcal{F})$  serait par exemple dans notre cas  $L^2(\Gamma_e \times \Gamma_m)$ . Il n'est pas clair pour autant que la norme  $L^2$  soit la plus pertinente pour mesurer l'écart entre la simulation et les mesures. Plus récemment, la minimisation de  $J$  a été étudiée dans le cadre moins restrictif d'espaces de Banach, en particulier avec la norme  $L^1$  [Chan & Esedoğlu 2005, Clason *et al.* 2010]. Dans ce cas, il est possible de considérer  $\mathcal{F}$  comme prenant ses valeurs dans l'espace complet des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma_e \times \Gamma_m)$  muni de la norme  $L^\infty(D)$ .

Pour des raisons pratiques, nous considérerons dans cette thèse uniquement le cadre Hilbertien en définissant  $\mathcal{F}$  comme étant à valeurs dans l'espace  $L^2(\Gamma_e \times \Gamma_m)$  muni de sa norme classique.

### Mauvais conditionnement du problème

Quel que soit le choix de la norme, remplacer le problème (4.2) par la résolution d'un problème aux moindres carrés comme la minimisation de  $J$  (4.3) peut être satisfaisant si on peut choisir des quasi-solutions continues par rapport aux mesures. Ainsi, une faible perturbation des mesures ( $\varepsilon$ ) donnerait un indice proche de la solution exacte  $n^*$  à l'équation (4.2). Malheureusement, le problème qui est de trouver un minimiseur de  $J$  n'est pas continu par rapport à  $u_\varepsilon^\infty$ .

**Proposition 4.4.** *Le problème non-linéaire “trouver  $n_\varepsilon$  minimisant  $J$  (4.3)” est mal posé au sens de Hadamard.*

**Démonstration :** L'application  $\mathcal{F}$  est compacte et elle ne peut donc pas avoir d'inverse continu. En effet, il est montré que l'application  $n \mapsto u_n$  est continue de  $L^\infty(D)$  dans  $L^2(\Gamma_e) \times H^2(D)$  [Ségui 2000, Proposition 2.1.14]. Par conséquent, il en va de même pour



l'application  $n \mapsto (n-1)u_n$ . Or, le comportement asymptotique (1.13) de l'équation de Lippmann-Schwinger (1.14) permet d'écrire la relation suivante

$$\mathcal{F}(n) = V_1^\infty(k^2(n-1)u_n). \quad (4.4)$$

Ainsi, l'opérateur non-linéaire  $\mathcal{F}$  est la composée d'une application continue par un opérateur (linéaire) compact. La compacité de l'application  $\mathcal{F}$  fait que son inverse ne peut pas être continu. ■

Ainsi, même avec des données  $u_\varepsilon^\infty$  proches du champ lointain exact  $u^\infty$ , les minimiseurs de  $J$  peuvent être très éloignés de la solution exacte  $n^*$ . Une approche classique consiste à traiter la non-linéarité par une méthode de Newton et le caractère mal posé par une régularisation de Tikhonov.

#### 4.1.1 La méthode de Gauss-Newton

Le principe de la méthode de Gauss-Newton reprend celui de la méthode de Newton classique : à partir d'une reconstruction  $n_p$ , le point suivant est construit par la récurrence

$$n_{p+1} := n_p + dn_p, \quad (4.5)$$

où le terme  $dn_p$  est obtenu par la minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  qui est construite à partir de  $J$  (4.3) en linéarisant  $\mathcal{F}$  au point  $n_p$  :

$$\mathcal{J}(dn) := \|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p) dn - u_\varepsilon^\infty\|^2, \quad (4.6)$$

où  $D\mathcal{F}(n_p)$  est la différentielle de  $\mathcal{F}$  (4.1) en  $n_p$ . Cette différentielle peut être calculée directement à l'aide du lemme suivant :

**Lemme 4.5.** *L'application  $\mathcal{F}$  est deux fois différentiable et la différentielle  $D\mathcal{F}$  de l'application  $\mathcal{F}$  (4.1) au point  $n \in L^\infty(D)$ , appliquée à  $dn \in L^\infty(D)$ , est donnée par la formulation intégrale*

$$D\mathcal{F}(n) dn : (\theta, \hat{x}) \mapsto \int_{z \in D} k^2 u_n(\theta, z) u_n(-\hat{x}, z) dn(z), \quad \theta \in \Gamma_e, \hat{x} \in \Gamma_m, \quad (4.7)$$

où  $u_n(\theta, z)$  désigne le champ total solution du système (1.1)-(1.5) pour une source de type onde plane  $u^i(\theta, z) = e^{ik\theta \cdot z}$ .

**Remarque 4.6.** *Comme l'indice  $n \in L^\infty(D)$  est étendu par la constante 1 en dehors de  $D$  pour définir  $\mathcal{F}$ , la direction  $dn \in L^\infty(D)$  est donc naturellement étendue par 0 en dehors de  $D$ .*

**Démonstration :** La définition (1.6) du champ lointain  $u_n^\infty$  montre que c'est une application linéaire du champ diffracté  $(u_n - u^i)$ , où  $u^i$  est une source (c'est-à-dire vérifiant  $(\Delta + k^2)u^i = 0$ ). Les dérivées successives du champ lointain peuvent donc être obtenues en prenant le champ lointain des dérivées successives du champ diffracté. Or, pour toute

source  $u^i$ , il est montré dans [Ségui 2000, Proposition 4.3.1] que l'application champ diffracté est deux fois différentiable. Il en va donc de même pour  $\mathcal{F}$ . De plus, la différentielle de l'application champ diffracté  $n \mapsto (u_n - u^i)$  au point  $n$  et appliquée à  $dn$  est la fonction  $v^s \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$  solution du système

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n(x)) v^s(x) = -k^2 dn(x) u_n(x), & x \in \mathbb{R}^d, \\ \partial_r v^s = i k v^s + \mathcal{O}(|x|^{-\frac{d-1}{2}}). \end{cases} \quad (4.8)$$

Donc, la différentielle du champ lointain en  $dn \in L^\infty(D)$  est l'application définie dans  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma_e \times \Gamma_m)$  par  $D\mathcal{F}(n) dn = v^\infty$ .

En multipliant la première équation du système (4.8) par  $\Phi_n(\cdot, x)$  et en intégrant sur  $D$ , par les mêmes calculs qu'en (2.11) et (2.12) le champ diffracté s'écrit alors

$$v^s(x) = \int_{z \in D} k^2 \Phi_n(z, x) u_n(z) dn(z), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Le comportement asymptotique est ainsi donné par

$$v^\infty(\hat{x}) = \int_{z \in D} k^2 \Phi_n^\infty(z, \hat{x}) u_n(z) dn(z), \quad \hat{x} \in S^{d-1}.$$

Finalement, la formule (4.7) s'obtient en considérant des sources  $u^i$  de type onde plane et le “mixed reciprocity principle” du Lemme 2.3. ■

Les problèmes des moindres carrés linéaires ont été très largement étudiés et on connaît une caractérisation des minimiseurs de  $\mathcal{J}$  (4.6) [Björck 1996, Théorème 1.1.10]. Cependant, linéariser l'application  $\mathcal{F}$  dans la fonctionnelle  $J$  (4.3) ne suffit pas à rendre la minimisation bien posée. En effet, la différentielle d'une application compacte sera toujours compacte [Colton & Kress 1998, Théorème 4.19]. Ainsi, trouver des indices minimisant  $\mathcal{J}$  (4.6) est aussi un problème mal posé. Ceci signifie que l'on manque d'informations pour trouver la solution de manière satisfaisante et qu'il va falloir supposer a priori le type d'indice recherché pour avoir un problème bien posé.

**Remarque 4.7.** *La compacité de la différentielle peut être directement vérifiée sur la représentation (4.7). En effet, cette représentation est un opérateur intégral défini sur  $L^\infty(D)$  et ayant un noyau appartenant à  $L^1(D)$  (puisque  $u_n(\theta, \cdot) \in L^2(D)$ ). C'est donc un opérateur compact (voir par exemple [Kato 1995, Exemple 4.1]).*

#### 4.1.2 Introduction de la régularisation

Pour approcher la solution d'un problème mal posé de manière continue on construit une suite convergente de solutions à des problèmes bien posés. Le principe de la régularisation de problèmes mal posés est présenté dans [Colton & Kress 1998, Chapitre 4] ou [Kirsch 1996, Chapitre 2] et fait l'objet principal de [Engl et al. 1996]. Une des régularisations les plus utilisées est celle de Tikhonov. Elle consiste en l'ajout d'un terme de

régularisation au terme de fidélité  $J$  (4.3). La fonction coût avec régularisation de Tikhonov  $J_X$  s'écrit alors

$$J_X(n) := J(n) + \lambda R_X(n),$$

le facteur  $\lambda > 0$  étant un paramètre de régularisation. Comme pour la norme du terme de fidélité, on s'attend aussi à ce que le choix du terme de régularisation influe sur le résultat obtenu tant que le paramètre de régularisation n'est pas assez proche de zéro.

Des résultats d'existence et de convergence des minimiseurs pour la fonctionnelle régularisée  $J_X$  vers la solution  $n^*$  de (4.2) existent pour des termes de régularisation génériques [Seidman & Vogel 1989, Ulbrich 1998, Hofmann *et al.* 2007]. Cependant, les hypothèses nécessaires sont parfois difficiles à vérifier. De plus, trouver un minimiseur à la fonctionnelle régularisée peut alors devenir plus compliqué. Par conséquent nous restreignons notre choix aux termes de régularisation  $L^2$  et  $TV$  pour lesquels la convergence est établie sous des hypothèses peu restrictives.

### A - La régularisation de Tikhonov itérative en norme $L^2$

Le terme de régularisation de Tikhonov classique pour les problèmes non-linéaires est

$$R_{L^2}(n) = \|n - n_{\text{ref}}\|_{L^2(D)}^2,$$

où  $n_{\text{ref}}$  est un point de référence. Le principe est de rechercher une solution minimisant  $J$ , qui représente l'écart entre simulation et mesures (4.3), et la plus proche possible de  $n_{\text{ref}}$  en norme  $L^2$ . On fait donc l'hypothèse a priori que l'indice recherché est de faible amplitude (par rapport au point de référence). La régularisation en norme  $L^2$  est étudiée en détail dans [Engl *et al.* 1996] et a été appliquée au problème de la reconstruction d'indice par exemple dans [Hohage 2001]. La linéarisation de l'application  $\mathcal{F}$  dans la fonctionnelle régularisée  $J_{L^2}$  (4.1.2) donne alors

$$\mathcal{J}_{L^2}(dn) := \|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p) dn - u_\varepsilon^\infty\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \|dn + n_p - n_{\text{ref}}\|_{L^2(D)}^2. \quad (4.9)$$

Dans le cadre de la minimisation d'une fonctionnelle linéaire, le point de référence  $n_{\text{ref}}$  est généralement fixé à 0. En prenant  $n_{\text{ref}} = n_0$ , on obtient l'algorithme dit de Gauss-Newton à régularisation itérative (IRGN, pour "Iteratively Regularized Gauss-Newton") dont les itérés sont caractérisés par l'équation normale

$$n_{p+1} := n_p - \left( (D\mathcal{F}(n_p))^* D\mathcal{F}(n_p) + \lambda I \right)^{-1} \left( (D\mathcal{F}(n_p))^* (\mathcal{F}(n_p) - u_\varepsilon^\infty) + \lambda_p (n_p - n_0) \right). \quad (4.10)$$

La convergence de cette suite vers la solution  $n^*$  de l'équation (4.2) est traitée initialement dans [Bakushinsky 1992]. L'étude des hypothèses nécessaires pour garantir un certain ordre de convergence est ensuite détaillée dans [Bakushinsky & Kokurin 2004, Chapitre 4] ou [Kaltenbacher *et al.* 2008, Section 4.2]. Le lemme suivant présente un de ces résultats de convergence pour des hypothèses très peu restrictives.

**Lemme 4.8** (Convergence de l'algorithme IRGN). [Kaltenbacher 1997, Théorème 2.5]  
S'il existe un élément  $w$  tel que le point de départ  $n_0$  vérifie la condition appelée "source condition"

$$n^* - n_0 = \left( (D\mathcal{F}(n^*))^* D\mathcal{F}(n^*) \right) w, \quad (4.11)$$

si  $D\mathcal{F}$  est Lipschitzienne et si le paramètre de régularisation  $\lambda$  est adapté à chaque itération en vérifiant

$$\lambda_p > 0, \quad 1 \leq \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} \leq r, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p = 0, \quad (4.12)$$

où  $r > 1$  est une constante, alors, en choisissant  $p_\varepsilon$  tel que

$$\varepsilon \sim \lambda_{p_\varepsilon}^{3/2}, \quad (4.13)$$

le terme  $n_{p_\varepsilon}$ , défini par la suite (4.10), est proche de  $n^*$ , la solution à l'équation (4.2) et vérifie

$$\|n_{p_\varepsilon} - n^*\| = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right).$$

Le Lemme 4.8 garantit ainsi une convergence de la suite définie par (4.10) vers l'indice recherché  $n^*$ . Cependant, l'expérience montre que ce terme de régularisation a tendance à induire des oscillations dans les reconstructions successives  $n_p$ . De plus, minimiser le carré de la norme  $L^2$  conduit généralement à des reconstructions lissées en terme de contraste. Ceci est donc peu adapté à la reconstruction de discontinuités. Or, comme nous le verrons par la suite, nous allons rechercher l'indice sous forme de constantes par morceaux, ce qui sera par ailleurs en accord avec le cadre d'utilisation de la méthode de localisation des défauts. La régularisation en norme  $L^2$  peut alors ne pas être la mieux adaptée. Nous présentons ainsi un second type de régularisation qui pourrait être plus en accord avec une reconstruction d'indice sous forme de constantes par morceaux.

**Remarque 4.9.** Dans le cas de problèmes aux moindres carrés non-linéaires mais bien posés, une deuxième méthode est assez souvent utilisée : la méthode de Levenberg-Marquardt [Moré 1978]. La mise en oeuvre de cette méthode est similaire à celle de la méthode IRGN (4.10). La différence (en dimension finie) est que la matrice  $\lambda I$  rendant le problème bien posé est remplacée par la matrice diagonale composée uniquement des termes diagonaux de  $\lambda \left( (D\mathcal{F}(n_p))^* D\mathcal{F}(n_p) \right)$ . Cependant, nous ne connaissons pas à ce jour de résultat de convergence pour la méthode de Levenberg-Marquardt appliquée aux problèmes mal posés. Par ailleurs, cette méthode n'a pas fourni d'amélioration de résultats pour les cas que nous avons traités et elle ne sera donc pas considérée par la suite.

## B - La régularisation en variation totale

Pour reconstruire des paramètres dont on veut préserver les discontinuités, les résultats sont généralement “meilleurs” avec le terme de régularisation

$$R_{TV}(n) = \|\nabla n\|_{L^1(D)},$$

(voir par exemple [Vogel & Oman 1996, Vogel & Oman 1998]). Par meilleur on entend d'un point de vue qualité de la représentation et nette té des discontinuités. Ce terme de régularisation basé sur la variation totale de l'indice est souvent appelé la semi-norme  $BV$  (pour l'espace des fonctions à variation bornée, “Bounded Variation”) ou régularisation  $TV$  (pour la mesure de la variation totale, “Total Variation”). Une étude de la reconstruction d'indices avec régularisation  $TV$  peut être trouvée dans [Ségui 2000].

D'un point de vue pratique, il semble plus naturel de chercher à réduire les variations du terme de mise à jour  $dn_p := (n_{p+1} - n_p)$  plutôt que celles de l'indice  $n_p$ . La régularisation  $TV$  est donc généralement appliquée après linéarisation du terme de fidélité. La solution du problème linéarisé et régularisé en variation totale est ainsi la solution ayant les plus faibles variations. Ceci revient à faire l'hypothèse a priori que l'indice recherché est majoritairement constant par morceaux. Le terme de mise à jour  $dn_p$  pour la suite d'indices (4.5) de la méthode de Gauss-Newton s'obtient alors comme le minimiseur de

$$\mathcal{J}_{TV}(dn) := \|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p) dn - u^\infty\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \|\nabla dn\|_{L^1(D)}. \quad (4.14)$$

Contrairement au cas précédent, cette fois-ci la dépendance en  $dn$  n'est plus linéaire. Le terme de régularisation n'est d'ailleurs plus différentiable. En pratique on utilise alors le terme de régularisation lissé suivant

$$R_{TV_\beta}(dn) = \int_D \sqrt{|\nabla dn|^2 + \beta}, \quad (4.15)$$

où  $\beta > 0$  est un petit paramètre rendant  $R_{TV_\beta}$  dérivable. La convergence de la méthode de Gauss-Newton avec ce terme de régularisation est étudiée entre autres dans [Vogel & Oman 1996, Chavent & Kunisch 1997, Ségui 2000].

Comme  $R_{TV_\beta}$  est différentiable, le minimiseur  $dn_p$  de la fonctionnelle régularisée

$$\mathcal{J}_{TV_\beta}(dn) := \|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p) dn - u^\infty\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \left\| \sqrt{|\nabla dn|^2 + \beta} \right\|_{L^1(D)}, \quad (4.16)$$

peut être approché en utilisant par exemple la méthode de Newton (voir [Ségui 2000]). Ce terme de mise à jour  $dn_p$  est alors la limite d'une suite  $(\delta_s)_{s=1,2,\dots}$  dont les éléments sont définis implicitement par le système linéaire

$$\begin{aligned} & \left( (D\mathcal{F}(n_p))^* D\mathcal{F}(n_p) + \lambda DG(\delta_s) \right) (\delta_{s+1} - \delta_s) = \\ & - (D\mathcal{F}(n_p))^* D\mathcal{F}(n_p) \delta_s - (D\mathcal{F}(n_p))^* (\mathcal{F}(n_p) - u_\varepsilon^\infty) - \lambda_p G(\delta_s), \end{aligned} \quad (4.17)$$

où  $G = \nabla R_{TV_\beta}$  représente le gradient du terme de régularisation lissé  $R_{TV_\beta}$  (4.15) et  $DG(\delta)$  représente la différentielle de ce gradient.

En pratique, l'indice sera recherché sous forme d'un nombre fini  $N$  de constantes par morceaux

$$n_\varepsilon(x) = \sum_{i=1\dots N} \alpha_i \chi_{Z_i}(x), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad x \in D.$$

On note alors  $M$  le nombre de frontières entre les zones  $(Z_i)_{i=1\dots N}$  et  $\rho_i$  leur longueur respective. Dans ces conditions, le vecteur  $G(\delta)$  et la matrice  $DG(\delta)$  s'écrivent

$$\begin{aligned} G(\delta) &= S^* \circ \tilde{G} \circ S(\delta), \\ DG(\delta) &= S^* \circ D\tilde{G} \circ S(\delta), \end{aligned}$$

où l'opérateur linéaire  $S$  associe à un indice les valeurs de ses sauts aux frontières des éléments du maillage utilisé

$$S(\delta) := [\delta] = \delta_+ - \delta_-,$$

où, en notant  $z = a + ib$ , le vecteur  $\tilde{G}(z)$  est défini dans  $\mathbb{C}^{2M}$  par

$$\tilde{G}(z) := \begin{pmatrix} \rho_1 \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \beta}} \\ \vdots \\ \rho_M \frac{a_M}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \beta}} \\ \rho_1 \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \beta}} \\ \vdots \\ \rho_M \frac{b_M}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \beta}} \end{pmatrix},$$

et où la matrice  $D\tilde{G}(z)$  est définie dans  $\mathbb{C}^{2M \times 2M}$  par

$$D\tilde{G}(z) := \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix},$$

avec les blocs diagonaux suivants

$$B_1 := \begin{pmatrix} \frac{\rho_1(b_1^2 + \beta)}{(a_1^2 + b_1^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\rho_M(b_M^2 + \beta)}{(a_M^2 + b_M^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix},$$

$$B_2 := \begin{pmatrix} -\frac{\rho_1(a_1 b_1 + \beta)}{(a_1^2 + b_1^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} & & \\ & \ddots & \\ & & -\frac{\rho_M(a_M b_M + \beta)}{(a_M^2 + b_M^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix},$$

$$B_3 := \begin{pmatrix} -\frac{\rho_1(a_1^2 + \beta)}{(a_1^2 + b_1^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} & & \\ & \ddots & \\ & & -\frac{\rho_M(a_M b_M + \beta)}{(a_M^2 + b_M^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}.$$

**Remarque 4.10.** Du fait de la valeur absolue  $|\nabla n|$  dans  $R_{TV_\beta}$  (4.15), l'application  $\tilde{G}$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -différentiable mais elle est cependant  $\mathbb{R}$ -différentiable. Ainsi, la représentation en dimension finie de  $D\tilde{G}(\delta)$  est une matrice de taille  $2M \times 2M$  obtenue par différentiations respectives des parties réelle et imaginaire de  $\tilde{G}$  suivant l'identification canonique.

### 4.1.3 Exemple d'application dans un cas simple

Afin d'avoir une référence à laquelle comparer les applications des parties suivantes. Nous illustrons ici la méthode de Gauss-Newton avec les régularisations décrites à la section précédente sur le cas simple suivant, représenté sur la Figure 4.1. L'indice exact  $n^*$  que nous cherchons à reconstruire a pour support un disque de rayon 1. Ses valeurs sont fixées à 2 partout sauf dans un petit disque intérieur où l'indice est fixé à 2.2, comme illustré sur la Figure 4.1. Le nombre d'onde est fixé à  $k = 6$ , ce qui donne un objet dont la taille est environ le double de la longueur d'onde.

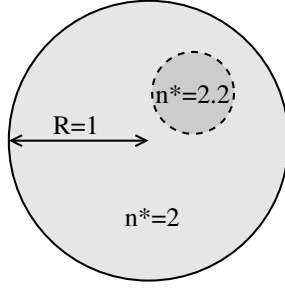


FIGURE 4.1: Schéma de l'indice recherché

### Choix du critère d'arrêt et du paramètre de régularisation

Le Lemme 4.8 présente un exemple de suite  $\lambda_p$  décroissante vers 0 faisant converger  $n_p$  vers  $n^*$  (dans les limites du bruit sur les données). Cependant la relation (4.13) est par définition assez floue et on constate en pratique que le choix du paramètre  $\lambda_p$  influe fortement sur la convergence de la méthode. Il nous faut donc fixer ce paramètre. De plus, il faut aussi déterminer un critère d'arrêt des itérations. Pour ceci, plutôt que de chercher à atteindre une certaine précision sans savoir si elle est atteignable en un temps raisonnable, nous stoppons la reconstruction lorsque la variation relative de la fonction coût  $J$  (4.3) est inférieure à 1%.

Pour ce qui est du paramètre de régularisation  $\lambda_p$ , le principe de Morozov par exemple [Tikhonov 1995], consiste à le choisir tel que le résidu de la solution  $dn(\lambda_p)$  minimisant  $\mathcal{J}_{L^2}$  (4.9) (ou  $\mathcal{J}_{TV}$  (4.14)) soit comparable au bruit sur les données  $\varepsilon$

$$\|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p) dn(\lambda_p) - u_\varepsilon^\infty\|_{L^2(D)}^2 = \varepsilon^2. \quad (4.18)$$

Dans ce cas, que ce soit pour (4.13) ou (4.18), il faut pouvoir estimer le bruit sur les données  $\varepsilon$ , ce qui est a priori difficile sans autres informations. Mais surtout, ce principe demande à calculer plusieurs fois le terme  $dn_p$  en faisant varier  $\lambda_p$  pour choisir le meilleur, ce qui est coûteux.

Dans [Hansen & O'Leary 1993], l'approche pour déterminer les paramètres  $\lambda_p$ , spécifique au terme de régularisation  $R_{L^2}$ , est de choisir le point de courbure maximale de la “L-curve”. Cette “L-curve” est une courbe paramétrée (par  $\lambda_p$ ) tracée en échelle log-log et définie par

$$\lambda \mapsto \left( \|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p) dn_p(\lambda) - u_\varepsilon^\infty\|_{L^2(D)}^2, R_{L^2}(dn_p(\lambda)) \right), \quad (4.19)$$

où  $dn_p(\lambda)$  est la solution de (4.10).

La Figure 4.2 présente le tracé de la “L-curve” obtenue à la première étape d'une reconstruction de l'indice représenté sur la Figure 4.1. Sur cet exemple, le point de courbure maximale correspond à un paramètre  $\lambda \approx 1$ . Nos expérimentations indiquent ainsi que le paramètre  $\lambda_p$  donné par la “L-curve” est très proche du centième de la norme de l'opérateur qu'on cherche à rendre inversible  $\left( (D\mathcal{F}(n_p))^* D\mathcal{F}(n_p) \right)$ . Pour nos exemples nous

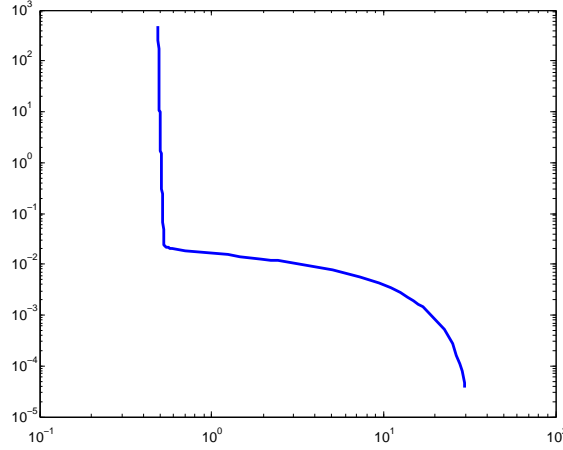


FIGURE 4.2: Exemple de “L-curve”

choisissons arbitrairement la suite  $\lambda_p$  définie par

$$\lambda_p = \frac{\|(D\mathcal{F}(n_p))^* D\mathcal{F}(n_p)\|}{p \cdot 10^2}. \quad (4.20)$$

Cette suite n’est peut-être pas optimale mais permet une estimation simple et rapide du paramètre de régularisation qui ne pénalisera pas l’ensemble de la résolution pour le cas traité.

**Remarque 4.11.** Le choix de paramètre  $\lambda_p$  proposé par la “L-curve” est amélioré par une méthode itérative de point fixe dans [Bazán & Francisco 2009]. Il y est démontré que le paramètre  $\lambda_p$  ainsi obtenu est plus souvent pertinent tout en demandant moins d’évaluations du résidu  $\|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p) dn_p(\lambda) - u_\varepsilon^\infty\|_{L^2(D)}^2$ . En outre, de nombreuses méthodes pour déterminer le paramètre  $\lambda_p$  sans connaître  $\varepsilon$  ont été proposées, par exemple en dérivant  $\mathcal{J}_{L^2}$  par rapport à  $\lambda_p$  pour résoudre (4.18) [Kunisch & Zou 1998, Wang & Xiao 2001]. Dans [Clason et al. 2010], l’équation (4.18) est approchée par une fonction à deux paramètres calculés uniquement à partir de  $\mathcal{F}$  et  $u_\varepsilon^\infty$  et le paramètre  $\lambda_p$  optimal est extrapolé à partir de cette fonction. Cependant, comme nous ne cherchons qu’à illustrer les méthodes sans avoir besoin de la reconstruction la plus précise possible de l’indice recherché, l’estimation (4.20) nous a paru suffisante.

### Discretisation du problème

Nous cherchons à reconstruire l’indice  $n^\star$  sous forme de fonctions constantes par morceaux. On subdivise ainsi le domaine  $D$  en  $N$  zones  $(Z_i)_{i=1\dots N}$  et on les cherche  $N$  paramètres (complexes)  $(\alpha_i)_{i=1\dots N}$  tels que l’indice

$$n_\varepsilon(x) = \sum_{i=1\dots N} \alpha_i \chi_{Z_i}(x), \quad (4.21)$$

minimise l’écart entre simulation et données (4.3). Tout comme au Chapitre 3.4.2, les zones  $(Z_i)_{i=1\dots N}$  de reconstruction sont choisies indépendamment du maillage utilisé pour générer les données.



Pour les exemples présentés dans cette section, le nombre de variables d'optimisation  $N$  sera fixé entre 20 et 2000. Par ailleurs,  $u^\infty$  sera composé de 4900 mesures, ce qui correspond à 70 directions d'émission/réception réparties sur tout le cercle  $S^1$ . Dans ce cas on peut explicitement former la matrice  $D\mathcal{F}(n_p)$  et résoudre le système (4.10) directement. Cependant, le calcul du terme de mise à jour pour la régularisation  $R_{TV_\beta}$  défini par (4.14) ne peut être qu'itératif, indépendamment du nombre de données et de variables d'optimisation. Ceci est dû à la non-linéarité du terme de régularisation.

**Remarque 4.12.** *Pour traiter le cas de grandes dimensions en  $N$ , ou pour optimiser le coût de calcul de (4.14), il faudra envisager l'utilisation de solveurs itératifs ne faisant intervenir que le résultat du produit matrice-vecteur, sans former explicitement la matrice  $D\mathcal{F}(n_p)$ . Des algorithmes reposant sur les espaces de Krylov sont proposés dans ce but dans [Schweiger et al. 2005, Langer 2010].*

### Application de la méthode de Gauss-Newton sans régularisation

En premier lieu nous présentons le résultat obtenu par la méthode de Gauss-Newton (4.10) sans la régularisation de Tikhonov ( $\lambda_p = 0$ ). En effet, le fait de rechercher  $n^*$  dans un espace de dimension finie est déjà une régularisation en soi, appelée régularisation par projection dans [Engl et al. 1996, Chapitre 3.3] ou régularisation par discrétisation dans [Kirsch 1996, Chapitre 3]. C'est alors la dimension du problème d'optimisation ( $N$ ) qui fait office de paramètre de régularisation et le conditionnement du problème se dégrade quand  $N$  augmente.

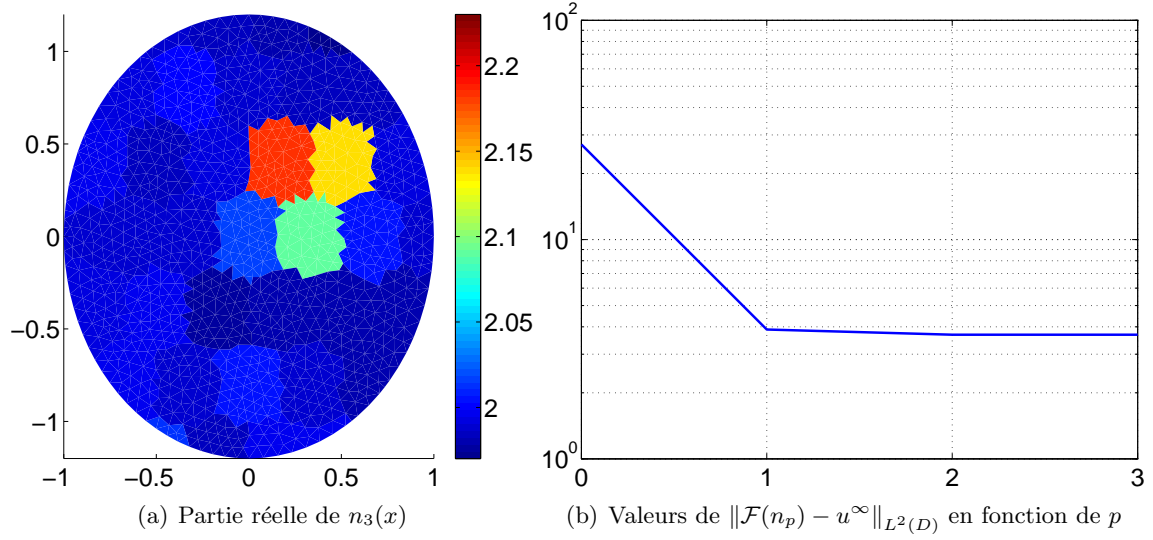
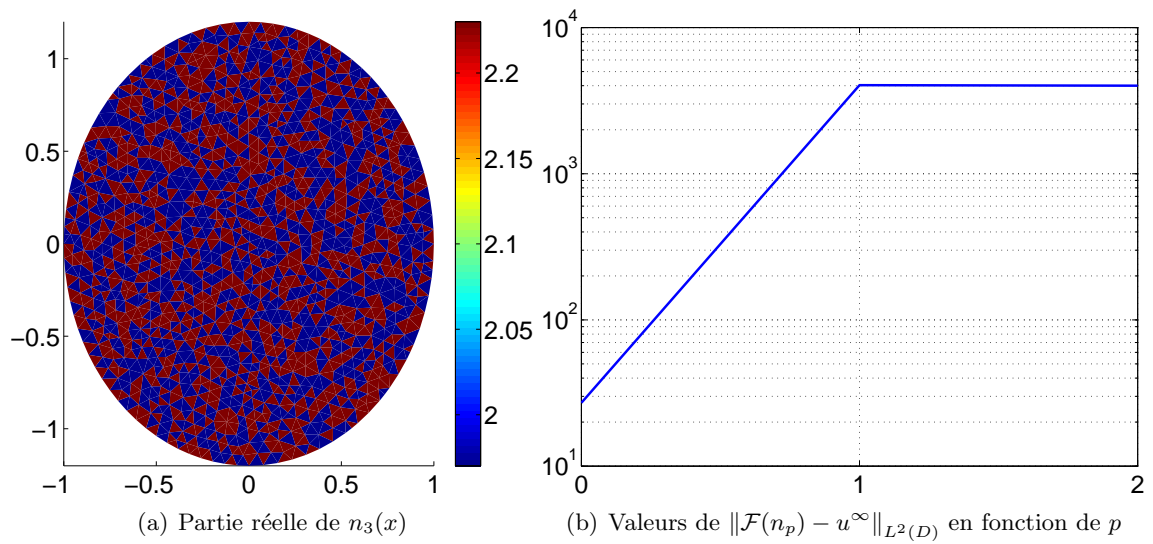
On voit sur la Figure 4.3 qu'avec un faible nombre de paramètres il n'est pas obligatoirement nécessaire d'utiliser la régularisation de Tikhonov pour obtenir une reconstruction convergente. Bien sur, le faible nombre de paramètres empêche une reconstruction précise de la géométrie de l'indice.

Toutefois, en augmentant le nombre de paramètres dans le but d'obtenir une reconstruction plus précise, on voit clairement sur la Figure 4.4 que la discrétisation seule ne suffit plus à régulariser la reconstruction.

### Application de la méthode de Gauss-Newton régularisée

Nous appliquons maintenant la régularisation de Tikhonov au problème de reconstruction de l'indice. Les itérations pour la régularisation  $L^2$  sont calculées par l'équation normale (4.10) et les itérations pour la régularisation  $TV$  sont obtenues en résolvant plusieurs fois l'équation normale (4.17) pour calculer le terme de mise à jour.

Les résultats présentés sur les Figures 4.5 et 4.6 sont obtenus en considérant respectivement la régularisation  $L^2$  (4.9) puis la régularisation  $TV$  (4.14). On voit que pour un faible nombre de paramètres, l'ajout d'un terme de régularisation n'améliore pas la reconstruction.

FIGURE 4.3: Méthode de Gauss-Newton sans régularisation avec  $N = 36$  paramètres complexesFIGURE 4.4: Méthode de Gauss-Newton sans régularisation avec  $N = 2035$  paramètres complexes

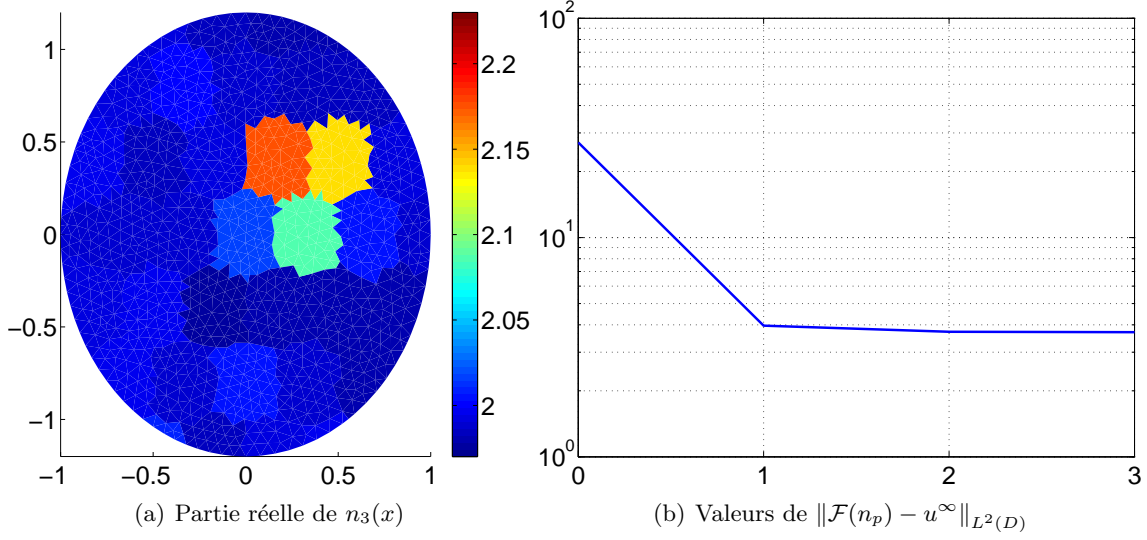


FIGURE 4.5: Méthode de Gauss-Newton avec régularisation  $L^2$  et  $N = 36$  paramètres complexes

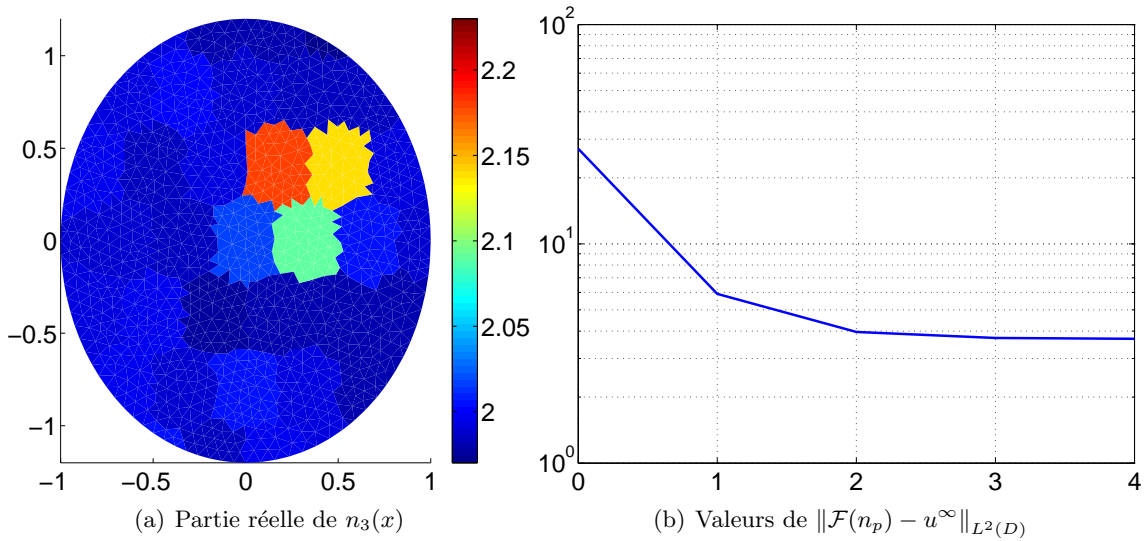


FIGURE 4.6: Méthode de Gauss-Newton avec régularisation  $TV$  et  $N = 36$  paramètres complexes

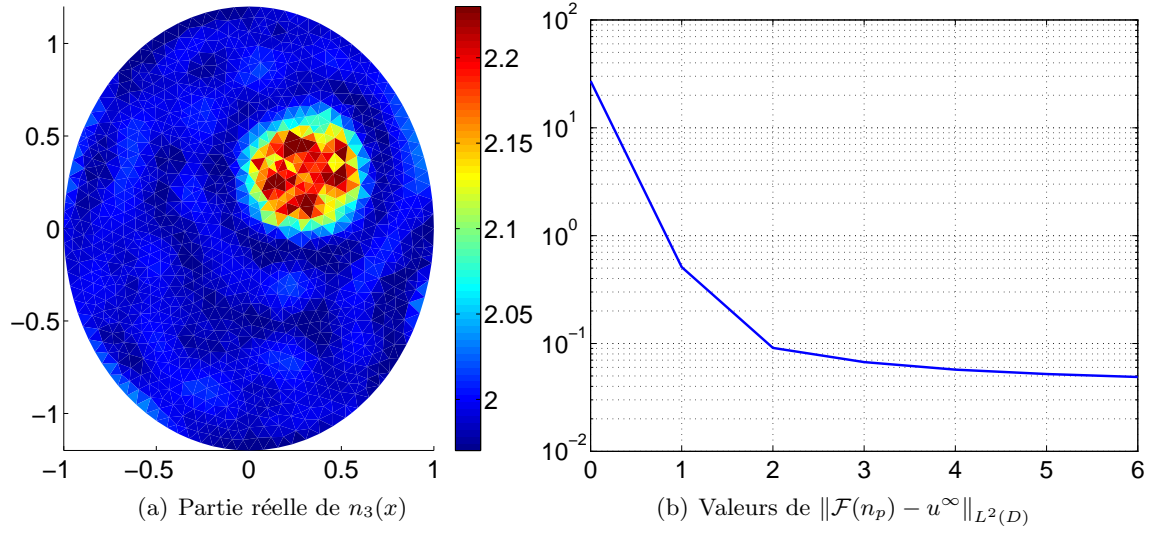


FIGURE 4.7: Méthode de Gauss-Newton avec régularisation  $L^2$  et  $N = 2035$  paramètres complexes

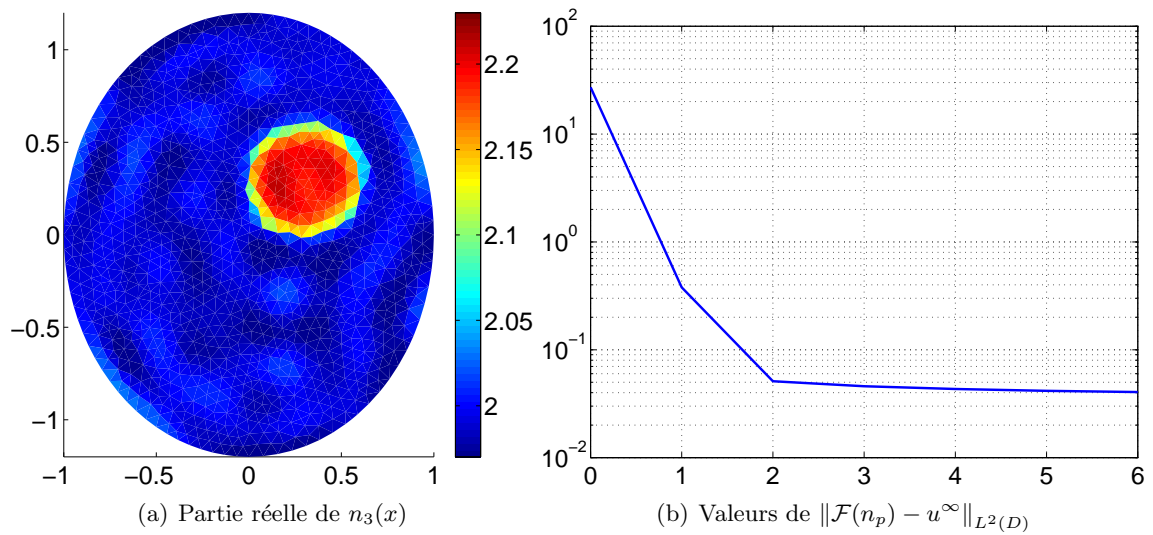


FIGURE 4.8: Méthode de Gauss-Newton avec régularisation  $TV$  et  $N = 2035$  paramètres complexes

Par contre, avec un nombre de paramètres plus conséquent, comme illustré sur les Figures 4.7 et 4.8, les différences sont visibles. Ainsi, la méthode de Gauss-Newton régularisée converge vers un résultat stable quand la méthode non régularisée diverge. De plus, les valeurs finales de la fonction coût sont significativement améliorées par l'augmentation du nombre de paramètres. Par ailleurs, contrairement aux résultats présentés sur les Figures 4.5 et 4.6, avec un grand nombre de paramètres on observe sur les Figures 4.7(a) et 4.8(a) que l'indice reconstruit dépend fortement du terme de régularisation choisi. Ainsi, le résultat présenté sur la Figure 4.7 a été obtenu en considérant la régularisation  $L^2$  (4.9). Comme annoncé dans la Section 4.1.2-A, on constate que la discontinuité entre la zone extérieure (où l'indice vaut 2) et la zone intérieure (où l'indice vaut 2.2) est lissée. La partie intérieure est ainsi entourée d'une couronne de zones où les valeurs de l'indice reconstruit sont proches de 2.1. De plus, des oscillations apparaissent dans la reconstruction, notamment dans la partie intérieure qui devrait être constante à 2.2. Comparativement, le résultat obtenu avec la régularisation  $TV$  (4.14), présenté sur la Figure 4.8, est visiblement plus net. Ceci rejoint la tendance généralement constatée avec ce type de régularisation, comme annoncé à la Section 4.1.2-B. Pour un indice exact présentant de grands aplats de valeurs, on obtient manifestement des reconstructions visuellement plus fidèles avec la régularisation  $TV$ . Cependant, l'écart entre la simulation et les données est quasiment identique pour les deux types de régularisation. Ceci soulève la question du choix de la fonction coût, ou tout du moins de la norme à utiliser.

## 4.2 Méthodes de Réduction du nombre de variables d'optimisation

Nous proposons maintenant deux méthodes de réduction du nombre de variables d'optimisation basées sur l'intégration des méthodes de détection de défauts à la méthode de Gauss-Newton.

En pratique, la méthode de Gauss-Newton produit une suite d'indices  $n_p$  qui, dans de bonnes conditions, se rapprochent de l'indice recherché  $n^*$ . De nombreux travaux traitent de la rapidité de cette convergence et donnent un ordre de grandeur pour  $\|n^* - n_p\|$  (voir par exemple [Engl *et al.* 1989, Hohage 1997, Blaschke *et al.* 1997, Hofmann *et al.* 2007]). Or, l'étape  $n_p$  de la reconstruction peut être considérée comme une version de  $n^*$  avec des défauts. Ainsi, les méthodes décrites au Chapitre 3 permettent d'obtenir une information locale sur l'adéquation entre  $n_p$  et  $n^*$ . En pratique, si on se réfère à la section 3.5.3, on peut même identifier les défauts les plus marqués quand les autres valeurs de  $n_p$  sont relativement proches du résultat recherché. Nous proposons alors deux approches pour exploiter cette information et améliorer le processus de recherche des valeurs de l'indice  $n^*$ .

Comme présenté précédemment, pour gagner en précision dans la recherche d'indice par une méthode de Gauss-Newton, il faut augmenter le nombre de paramètres recherchés. Comme nous recherchons l'indice sous la forme

$$n_\varepsilon(x) = \sum_{i=1 \dots N} \alpha_i \chi_{Z_i}(x),$$

ceci revient à augmenter le nombre  $N$  de zones  $Z_i$  (réduisant par là même leur taille). Or, si l'indice recherché présente effectivement un certain nombre d'endroits où ses valeurs sont très proches d'une constante, raffiner la recherche en augmentant le nombre de zones  $Z_i$  à ces endroits est inutilement coûteux.

Nous proposons alors en premier lieu une méthode de reconstruction des valeurs de défauts basée sur la sélection des paramètres utiles afin de réduire la dimension du problème tout en essayant de préserver la précision. Ensuite, nous proposons une méthode de raffinement adaptatif pour gagner en précision en faisant augmenter  $N$  le moins possible par le choix du placement des zones supplémentaires.

#### 4.2.1 Méthode de reconstruction des valeurs de défauts

Dans les chapitres précédents, nous avons développé des méthodes de localisation de défauts dans un indice de référence. Nous nous intéressons maintenant à la caractérisation de ces défauts par la reconstruction des valeurs effectives de l'indice aux endroits ayant subi des perturbations. Ceci étant, nos méthodes de localisation se sont révélées efficaces à la Section 3.4.4 pour des défauts plus grands que le sixième de la longueur d'onde, aussi nous ne considérons que des défauts qui ne sont pas trop petits par rapport à la longueur d'onde.

##### A - Présentation de la méthode

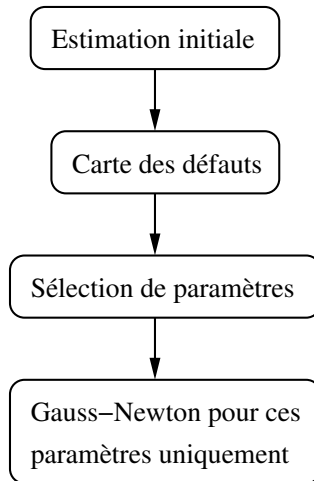


FIGURE 4.9: Procédure pour l'identification de défauts

Le principe de la méthode est de réduire la dimension du problème en ne reconstruisant que les valeurs qui correspondent effectivement à des défauts. Pour cela, comme illustré sur la Figure 4.9, on commence alors par localiser ces défauts dans l'indice donné  $n_0$  à partir des mesures en calculant les valeurs de la fonction de localisation des défauts  $\mathcal{M}_{\{n_1, n^*\}}$ , définie au Théorème 3.8. Le sous-ensemble de  $D$  correspondant aux défauts est alors sélectionné en seuillant cette carte de valeurs. Ensuite, une méthode de Gauss-Newton régularisée est

utilisée pour calculer les valeurs de l'indice uniquement dans la zone sélectionnée avec la précision voulue et en conservant les valeurs des autres paramètres.

## B - Exemples numériques

Nous présentons ici deux exemples d'applications de la méthode de reconstruction des valeurs de défauts.

Pour le premier exemple, nous reprenons à titre comparatif la géométrie simple décrite à la section 4.1.3 et schématisée sur la Figure 4.1. Pour mémoire, l'indice exact vaut 2 partout sauf dans une petite zone circulaire où il est fixé à 2.2. Cette petite zone symbolise un défaut dans un indice connu. L'estimation idéale est donc prise à  $n_0 = 2$  dans  $D$ .

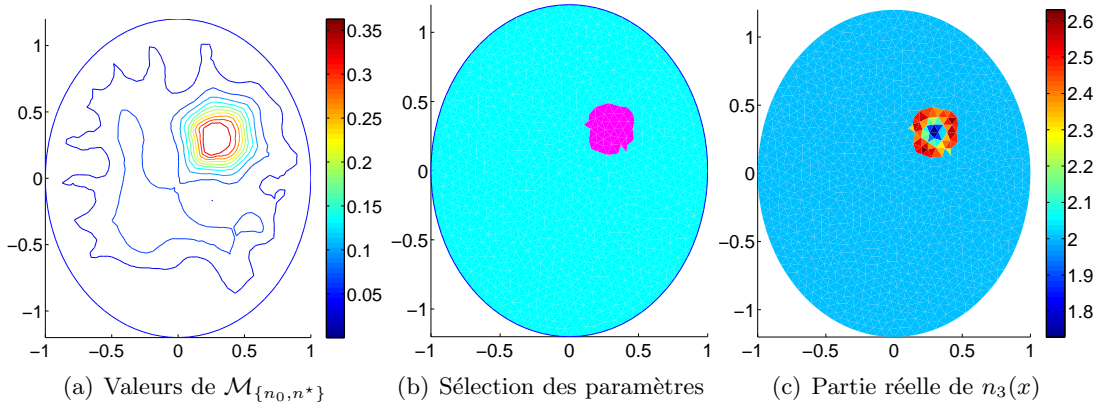


FIGURE 4.10: Identification de défauts dans un cas simple en seuillant à 70% du maximum de  $\mathcal{M}_{\{n_0, n^*\}}$

La Figure 4.10(a) montre les courbes de niveau de la fonction de localisation des défauts  $\mathcal{M}_{\{n_0, n^*\}}$ , calculée à partir de  $n_0$  et des mesures  $u_\varepsilon^\infty$ . En seuillant ces valeurs à 70% du maximum, on sélectionne alors 59 paramètres, représentés en rose sur la Figure 4.10(b) et censés contenir le support des défauts à identifier. Cependant, le seuillage est trop restrictif et la zone sélectionnée est plus petite que le défaut recherché. La Figure 4.10(c) illustre ainsi le résultat de la méthode de Gauss-Newton avec régularisation  $TV$  appliquée sur cette partie des paramètres en regroupant sous une seule zone tous les autres paramètres dont la valeur ne sera pas modifiée. On constate que l'algorithme tente de compenser l'absence des paramètres nécessaires par une reconstruction aberrante des valeurs (notamment au centre du défaut).

En seuillant les valeurs de la fonction de localisation des défauts à 25% de son maximum, on sélectionne maintenant 202 paramètres, représentés sur la Figure 4.11(a). Cette fois-ci, ils contiennent effectivement le support du défaut. On constate alors que cette reconstruction avec 202 paramètres bien choisis est très proche de celle obtenue avec l'ensemble des 2035 paramètres illustrée sur la Figure 4.8(a). De plus, comme une grande partie de l'indice initial n'a pas été modifiée, les oscillations parasites présentes sur la Figure 4.8(a) sont quasi-absentes sur la Figure 4.11(b).



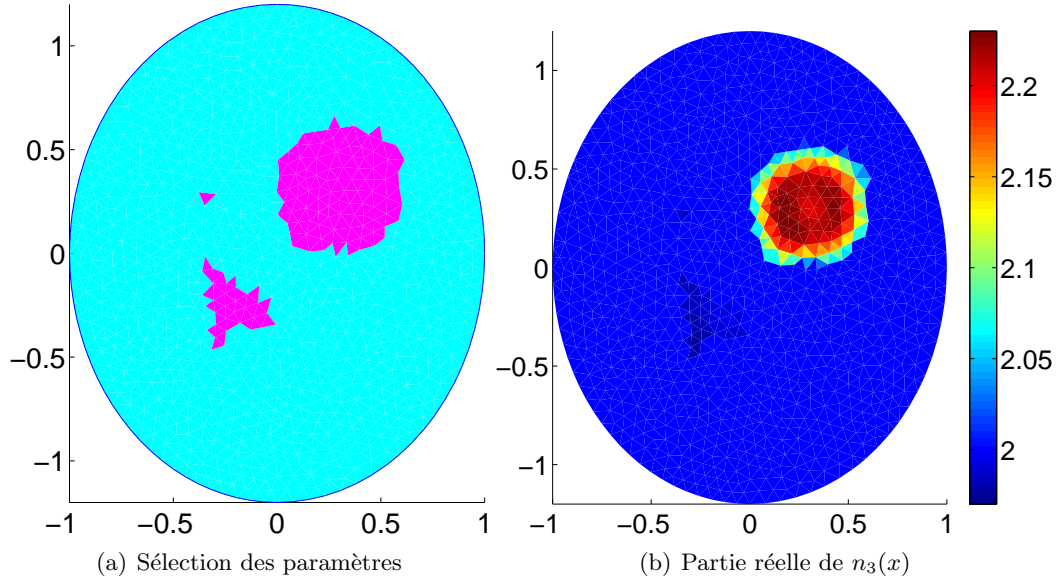


FIGURE 4.11: Identification de défauts dans un cas simple en seuillant à 25% du maximum de  $\mathcal{M}_{\{n_0, n^*\}}$

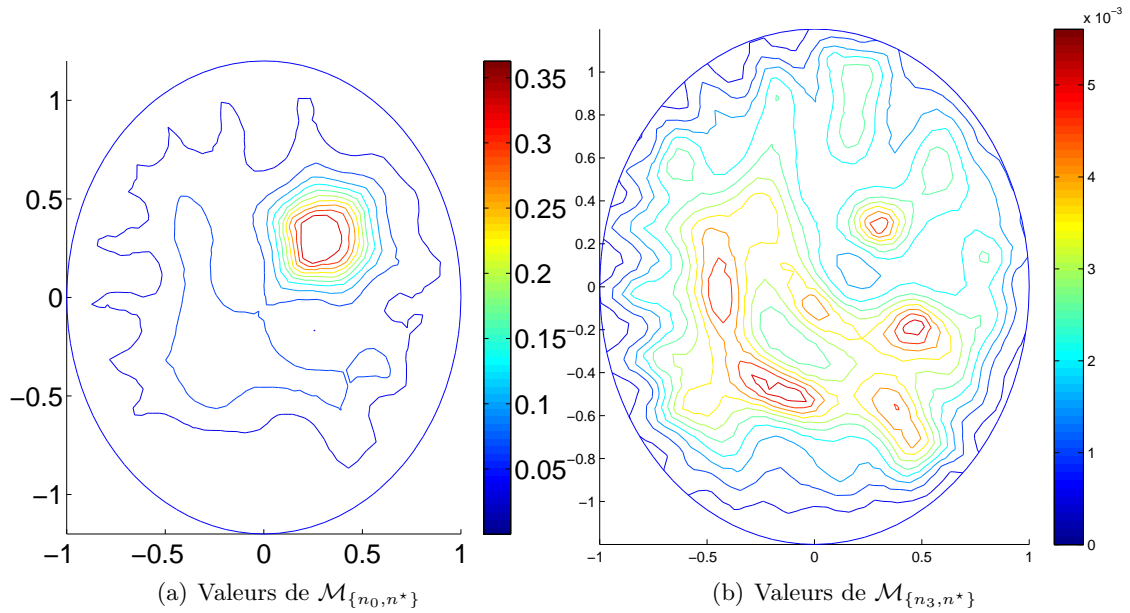


FIGURE 4.12: Validation a posteriori de l'identification de défauts



A titre de validation a posteriori, la Figure 4.12 compare la carte des valeurs de la fonction de localisation des défauts avant et après la reconstruction sélective de l'indice. On constate une très nette diminution des valeurs au niveau de la zone reconstruite, attestant du bon fonctionnement de la méthode. Nous vérifions ensuite que ce bon comportement n'est pas réduit au cas simple de ce premier exemple.

Pour le second exemple, nous illustrons alors la méthode de reconstruction des valeurs de défauts dans un indice présentant moins de symétries, tant pour sa géométrie que pour ses valeurs. De plus, contrairement au cas simple précédent, les données sont maintenant bruitées. Les mesures utilisées  $u^\infty$  sont perturbées par l'ajout de 2% de bruit uniforme.

La Figure 4.13 présente les valeurs réelles et imaginaires de l'indice considéré avant l'apparition de défauts. Ce sont ces valeurs qui nous serviront d'estimation initiale  $n_0$ . Le diamètre de l'objet est environ du double de la longueur d'onde (on conserve le nombre d'onde  $k = 6$  des exemples précédents).

Sur la Figure 4.14, sont représentées les valeurs de l'indice considéré après apparition de défauts. C'est donc l'indice exact  $n^*$  de l'objet étudié au moment des mesures (qui sont maintenant perturbées par l'ajout de 2% de bruit uniforme).

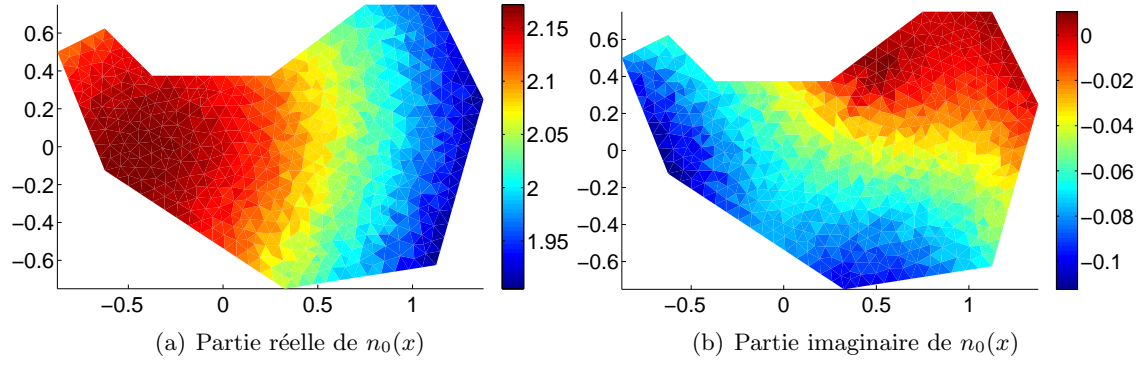
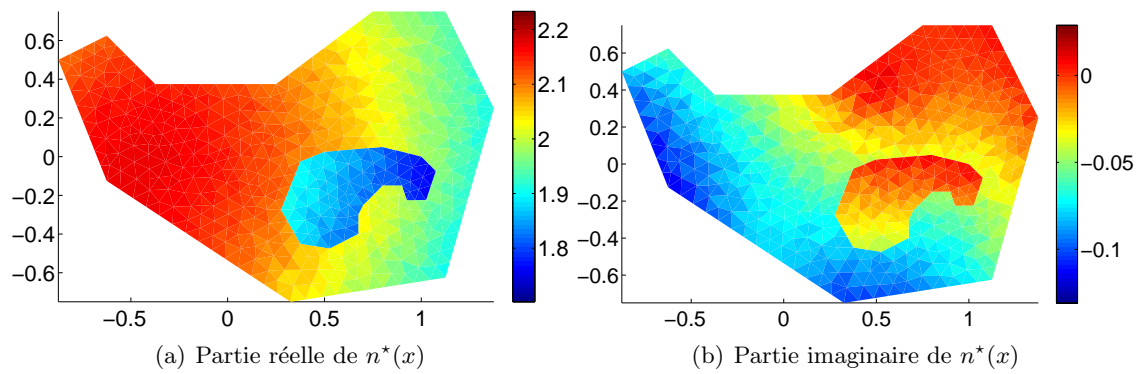
La Figure 4.15(a) montre la localisation des défauts obtenue en comparant le champ lointain engendré par l'indice  $n_0$  de la Figure 4.13 et les mesures obtenues avec l'indice  $n^*$  de la Figure 4.14. Comme indiqué sur la Figure 4.9, on seuille ensuite ces valeurs à 25% de leur maximum pour sélectionner les paramètres correspondants aux défauts à identifier. Les paramètres retenus sont indiqués sur la Figure 4.15(b). Le résultat qui s'en suit après 3 itérations de la méthode de Gauss-Newton avec régularisation  $TV$  sur 181 paramètres parmi 1106 est alors affiché sur les Figures 4.15(c) et 4.15(d). On constate sur la Figure 4.16 la même diminution des valeurs de la fonction de localisation des défauts que précédemment. Ainsi, cette méthode de reconstruction des valeurs de défauts est satisfaisante bien qu'effectuée sur le quart des paramètres. En effet, grâce à cette sélection, les oscillations parasites dans les valeurs déjà connues ont été évitées.

### 4.2.2 Méthode de raffinement adaptatif des zones de reconstruction

La seconde méthode consiste à augmenter progressivement la précision avec un nombre minimal de paramètres. Le but est de produire à faible coût une première approximation de l'indice.

#### A - Présentation de la méthode

Le principe, illustré sur la Figure 4.17, est le suivant. On commence avec première itération de Gauss-Newton sur un faible nombre de paramètres. Puis, pour chaque paramètre la moyenne des valeurs de  $\mathcal{M}_{\{n_1, n^*\}}(z)$  est évaluée sur la zone  $Z_i \subset D$  lui correspondant. A

FIGURE 4.13: Valeurs de l'indice avant défauts : estimation initiale  $n_0$ FIGURE 4.14: Valeurs de l'indice avec défauts recherché :  $n^*$

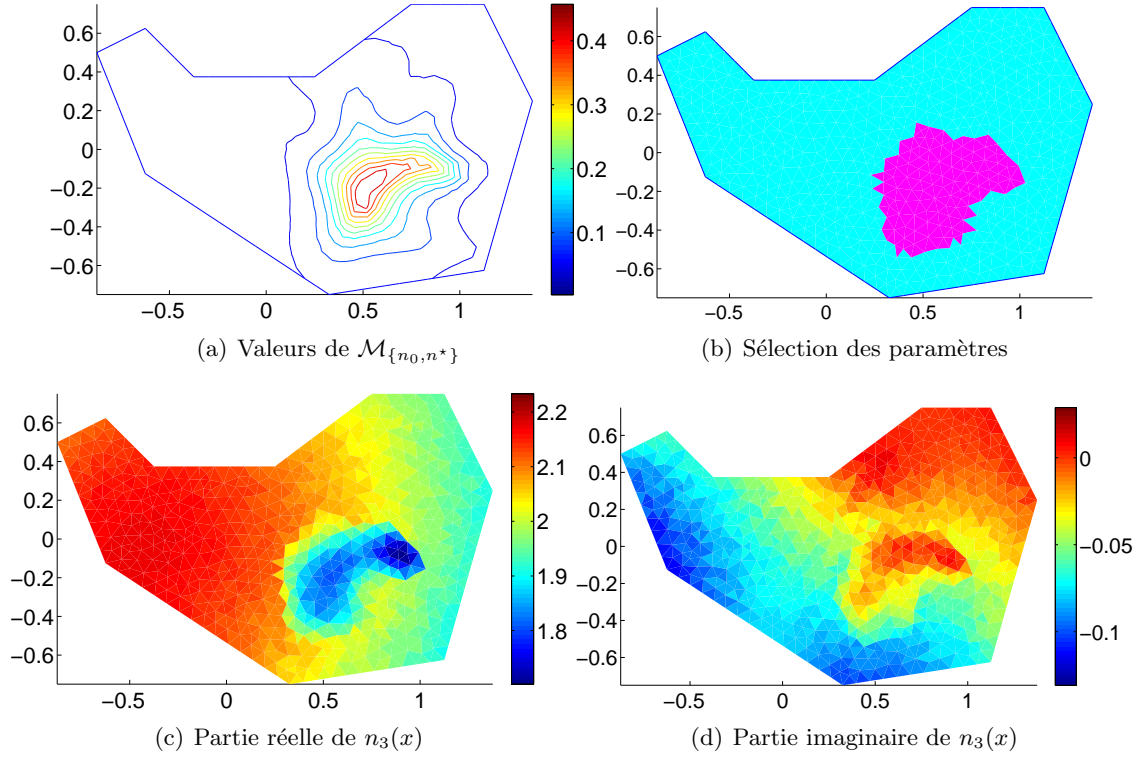


FIGURE 4.15: Identification de défauts avec 2% de bruit ajouté aux mesures

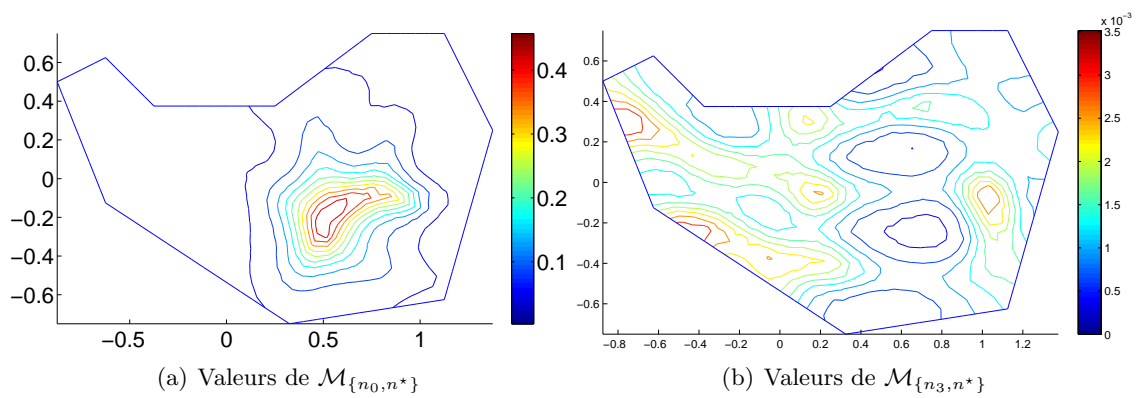


FIGURE 4.16: Validation a posteriori de l'identification de défauts

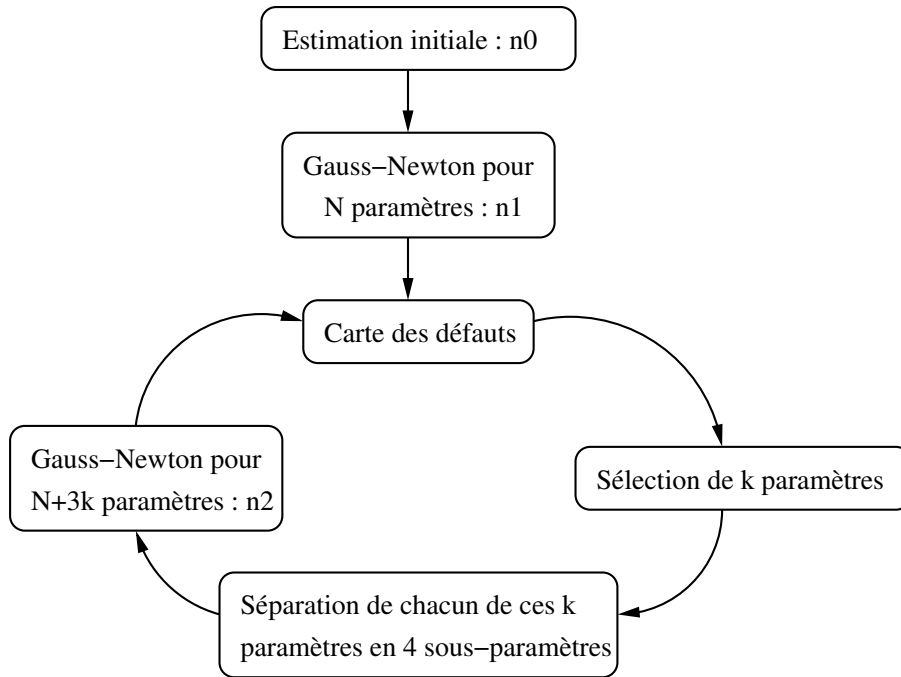


FIGURE 4.17: Procédure pour le raffinement adaptatif de la géométrie

partir de cette carte grossière des défauts, on détermine les zones dans lesquelles la valeur de la reconstruction est la moins représentative en moyenne des valeurs de  $n^*$  (sur cette zone). Les zones qui correspondent aux plus fortes valeurs moyennes de  $\mathcal{M}_{\{n_1, n^*\}}(z)$  sont alors subdivisées en un certain nombre de sous-zones (par exemple en 4 sur nos exemples). L'indice suivant ( $n_2$ ) est ensuite calculé par Gauss-Newton sur ce nouveau découpage plus fin de  $D$ . Le processus de sélection-découpage-reconstruction est alors itéré jusqu'à atteindre un nombre fixé de zones ou tant que la taille des nouvelles zones reste supérieure à un minimum qu'on se donne.

## B - Exemples numériques

Nous illustrons cette méthode pour la reconstruction de l'indice sur le cas simple présenté à la section 4.1.3 avec un maximum de 13 zones. Par contre, contrairement à l'exemple de la Section 4.2.1, nous ne cherchons pas un défaut dans un indice connu mais une approximation générale de l'indice. Il faut donc définir une première estimation de l'indice  $n_0$ . Or, comme la moyenne des valeurs de l'indice recherché est très proche de 2, nous gardons comme estimation initiale l'indice  $n_0 = 2$  partout dans  $D$ . Suivant la procédure décrite sur la Figure 4.17, la méthode de Gauss-Newton est alors appliquée pour  $N = 4$  paramètres. Par ailleurs, au vu du faible nombre de paramètres et en nous appuyant sur les résultats illustrés dans la section 4.1.3, aucune régularisation n'a été utilisée pour cet exemple.

Le résultat après 2 itérations est illustré sur les Figures 4.18(a) et 4.18(b). De cet indice on tire une carte des défauts représentée sur la Figure 4.18(c). En comparant les moyennes

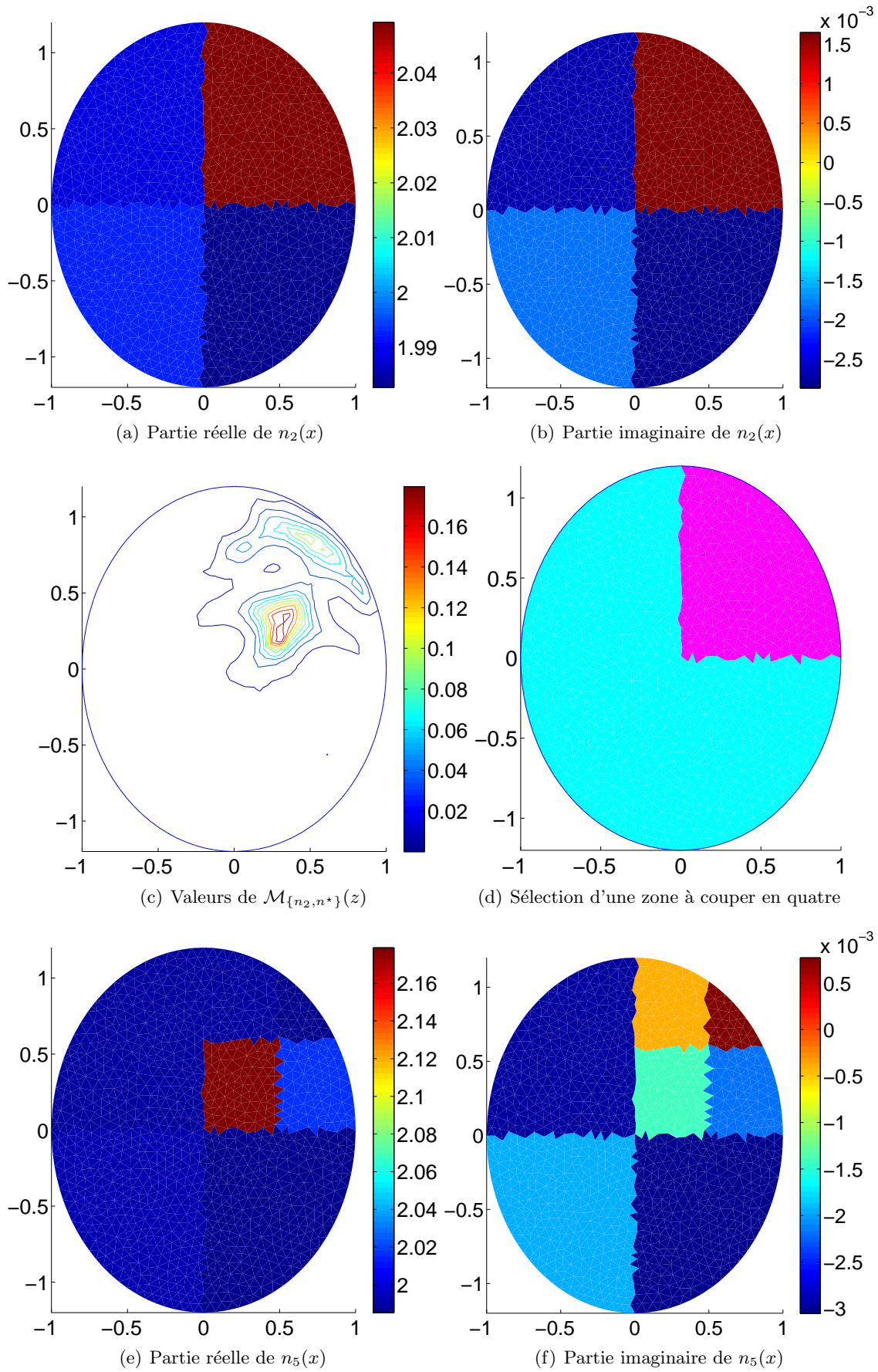


FIGURE 4.18: Raffinement adaptatif : cycle 1

des valeurs de  $\mathcal{M}_{\{n_5, n^*\}}(z)$  sur chacune des 4 zones, on sélectionne ainsi le quart supérieur droit (Figure 4.18(d)). Cette zone est alors divisée en 4 sous-zones et l'indice est ensuite recherché avec 7 paramètres. Le résultat après 3 itérations supplémentaires ( $n_5$ ) est illustré sur les Figures 4.18(e) et 4.18(f).

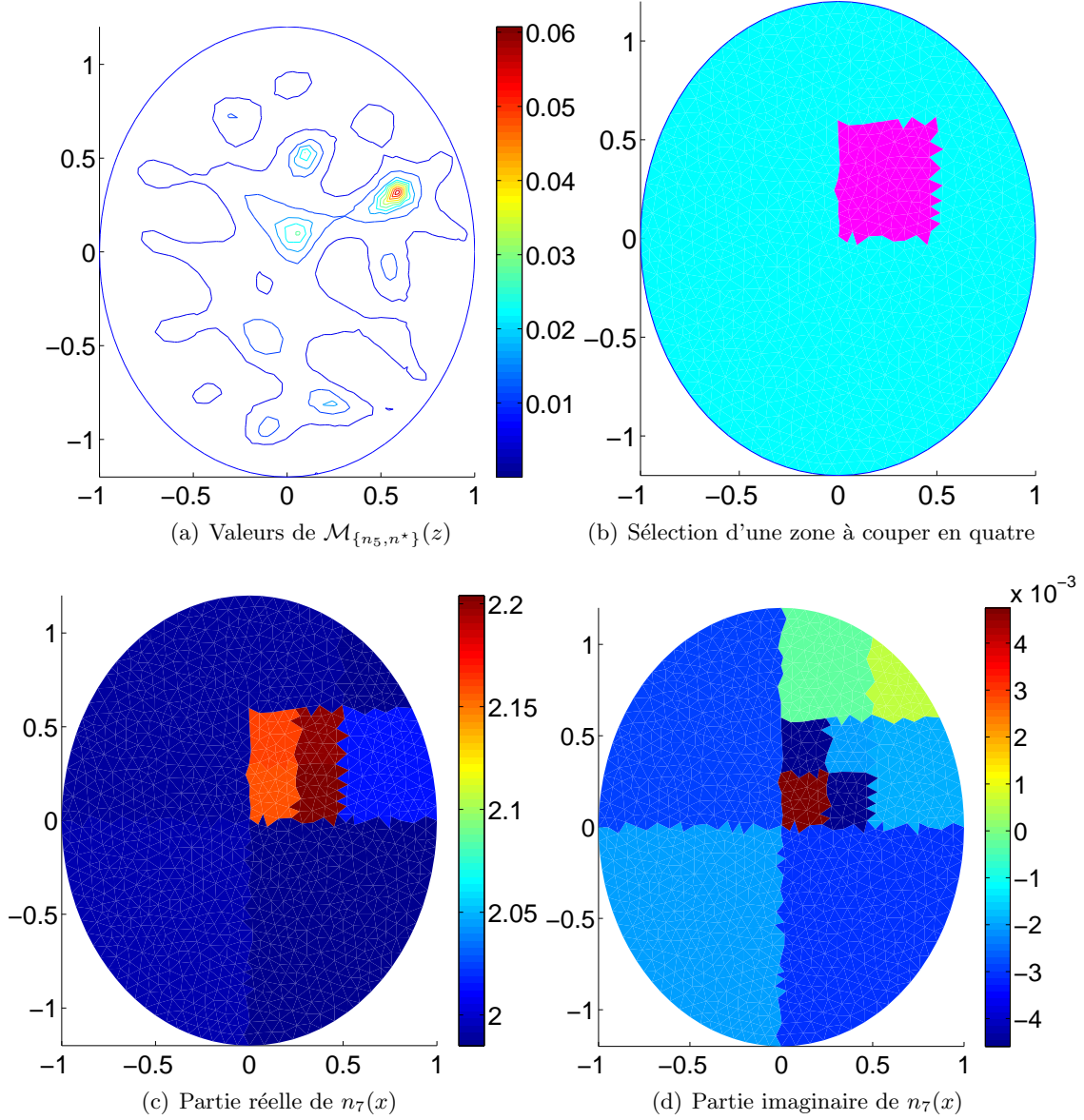


FIGURE 4.19: Raffinement adaptatif : cycle 2

Les Figures 4.19 et 4.20 montrent les deux cycles de raffinement suivants. On termine donc ici avec  $N = 13$  paramètres et une reconstruction  $n_9$  dont on devine bien qu'elle cherche à approcher la géométrie du petit cercle intérieur. Comme ce petit cercle est à cheval sur les zones issues de la première sub-division, la détection des défauts permet de sélectionner de manière pertinente les zones qui nécessiteraient plus de paramètres pour être correctement reconstruites.

A titre de comparaison, la Figure 4.21 met côte-à-côte les valeurs de (la partie réelle de)



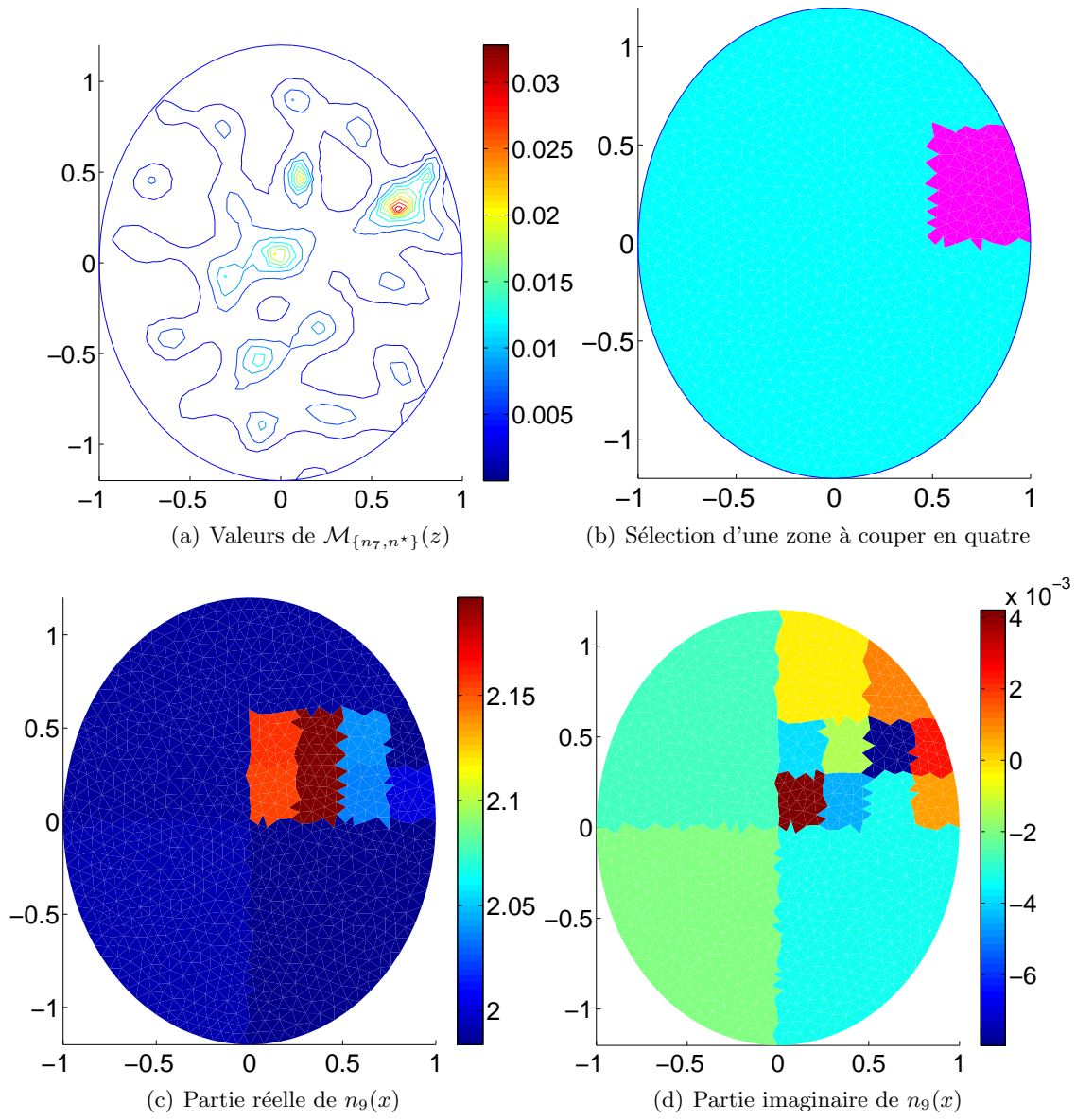


FIGURE 4.20: Raffinement adaptatif : cycle 3

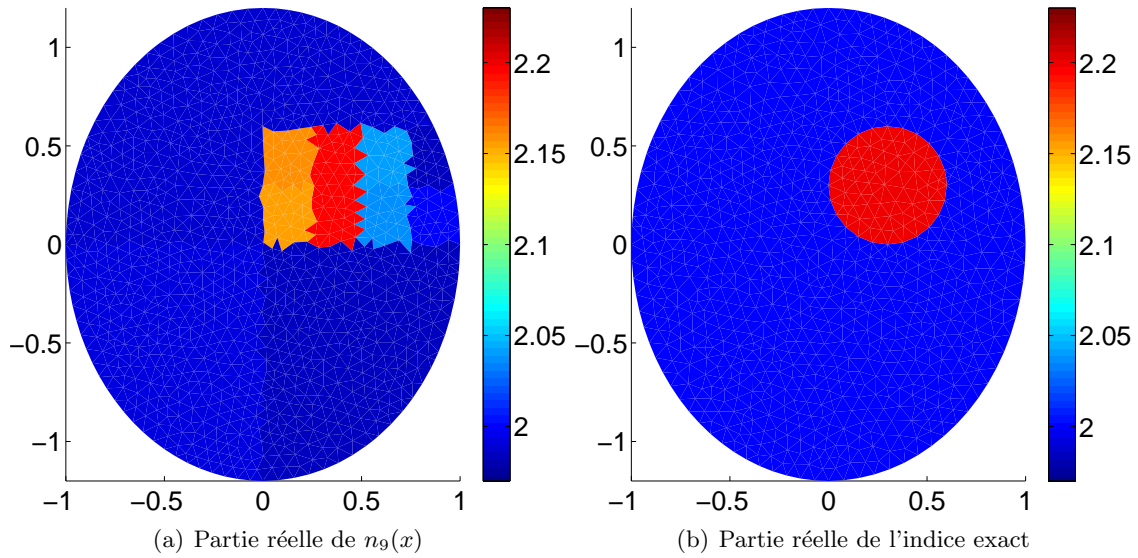


FIGURE 4.21: Comparaison de l'indice recherché avec la reconstruction obtenue après 3 cycles de raffinement itératif

l'indice  $n_9$  et de l'indice recherché sur la même échelle de couleurs. On constate ainsi que les zones ont été découpées de manière à pouvoir suivre la géométrie interne de l'objet étudié et que ceci permet à la reconstruction d'obtenir des valeurs cohérentes avec l'indice exact malgré un faible nombre de zones.

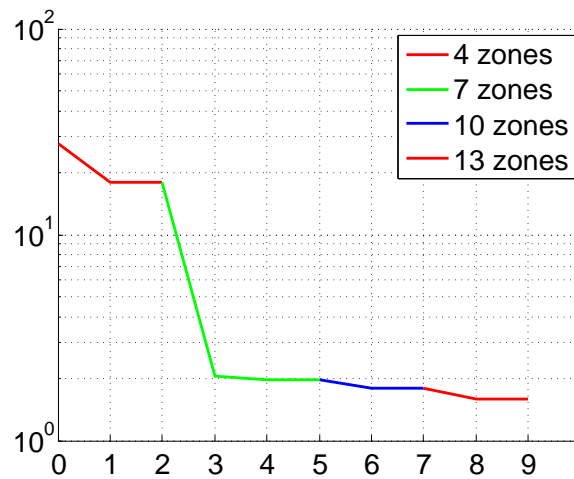


FIGURE 4.22: Valeurs de la fonction coût en fonction de l'étape  $p$  de Gauss-Newton avec raffinements successifs

Enfin, la Figure 4.22 montre l'évolution de la fonction coût  $J$  (4.3) pour chaque étape successive de la méthode de Gauss-Newton. On voit nettement qu'après chaque raffinement ( $p = 1, 3, 6$  et  $8$ ) la méthode de Gauss-Newton permet de réduire l'écart entre simulation et mesure. Par contre, la fonction coût stagne très rapidement après la première itération suivant chaque raffinement : avec si peu de paramètres, la méthode de reconstruction globale à une marge de manœuvre trop réduite. Ceci étant, on obtient avec très peu de paramètres une progression tout à fait satisfaisante.



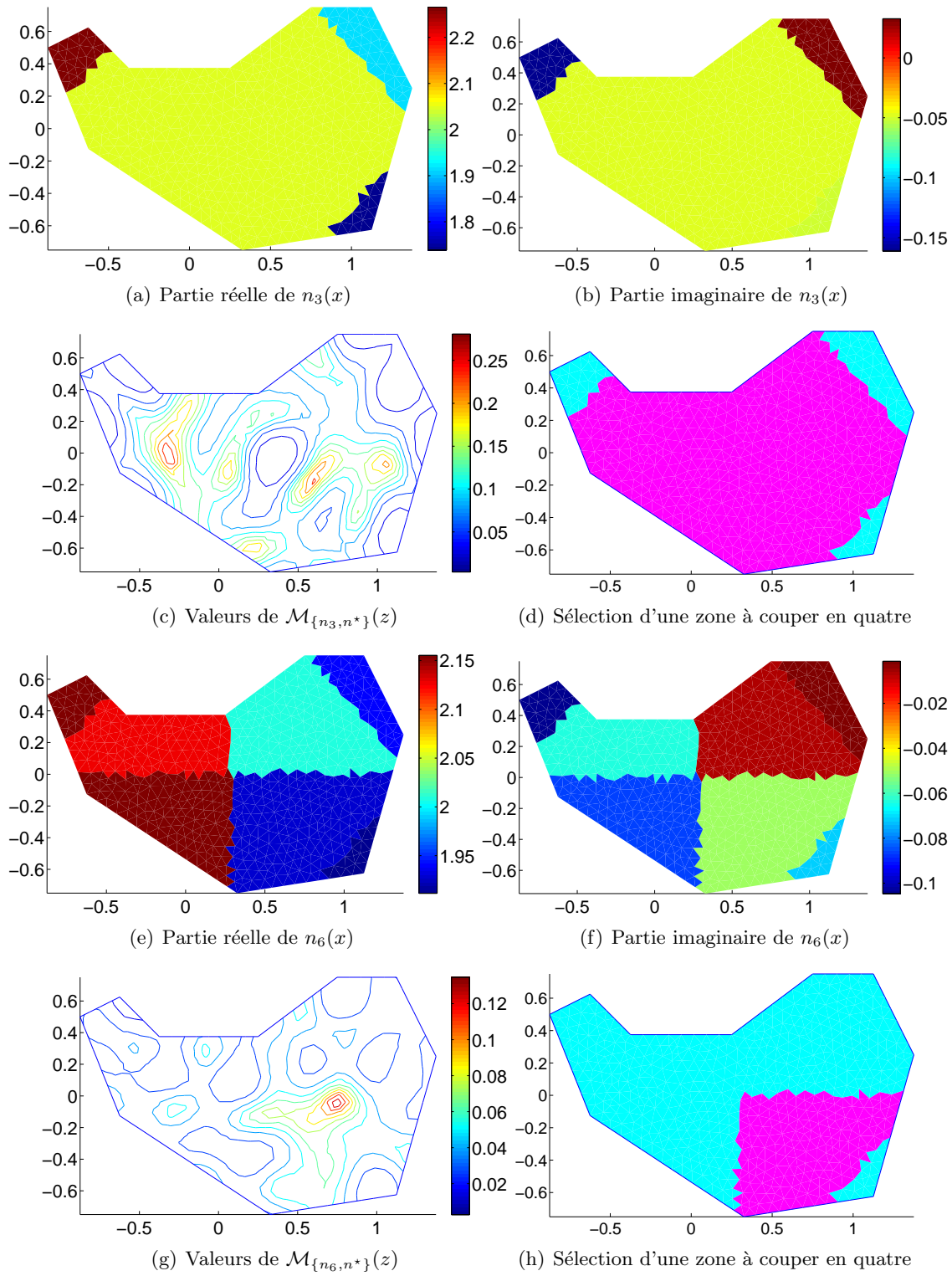


FIGURE 4.23: Raffinement adaptatif : cycles 1 et 2

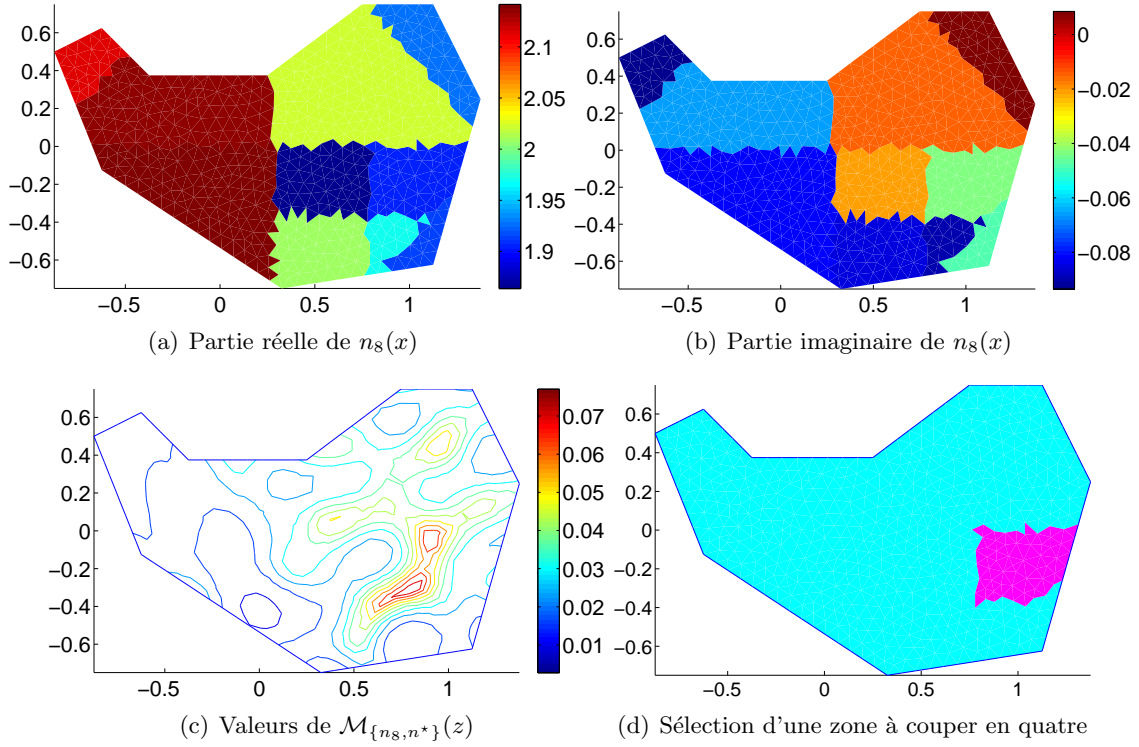


FIGURE 4.24: Raffinement adaptatif : cycle 3

Comme la méthode de raffinement adaptatif donne des résultats satisfaisants dans le cas simple que nous venons d'illustrer, nous nous intéressons ensuite à son comportement avec un indice dont la reconstruction semble plus compliquée. Nous reprenons ainsi la procédure de raffinement adaptatif pour la recherche sommaire de l'indice  $n^*$  présenté à la Figure 4.14. Là encore, sa valeur moyenne est proche de 2 et nous choisissons comme estimation initiale l'indice  $n_0 = 2$  partout dans  $D$ . Par ailleurs, les mesures sont perturbées par l'ajout de 2% de bruit uniforme. La Figure 4.23 montre alors la réalisation des étapes successives de raffinement adaptatif pour cet indice. On constate que même sur cet exemple non trivial la reconstruction par raffinement itératif arrive à traiter simultanément les valeurs et la géométrie de l'indice recherché.

La Figure 4.25 permet de comparer les valeurs de la reconstruction  $n_{10}$  avec celles de  $n^*$  sur la même échelle de couleurs. La ressemblance avec seulement 13 paramètres est tout à fait satisfaisante, surtout si on compare avec le résultat obtenu par la méthode de Gauss-Newton standard appliquée directement sur 13 paramètres répartis uniformément.

Enfin, le comportement de la fonction coût qu'on peut voir sur la Figure 4.26 est similaire à celui affiché à l'exemple précédent (Figure 4.22).

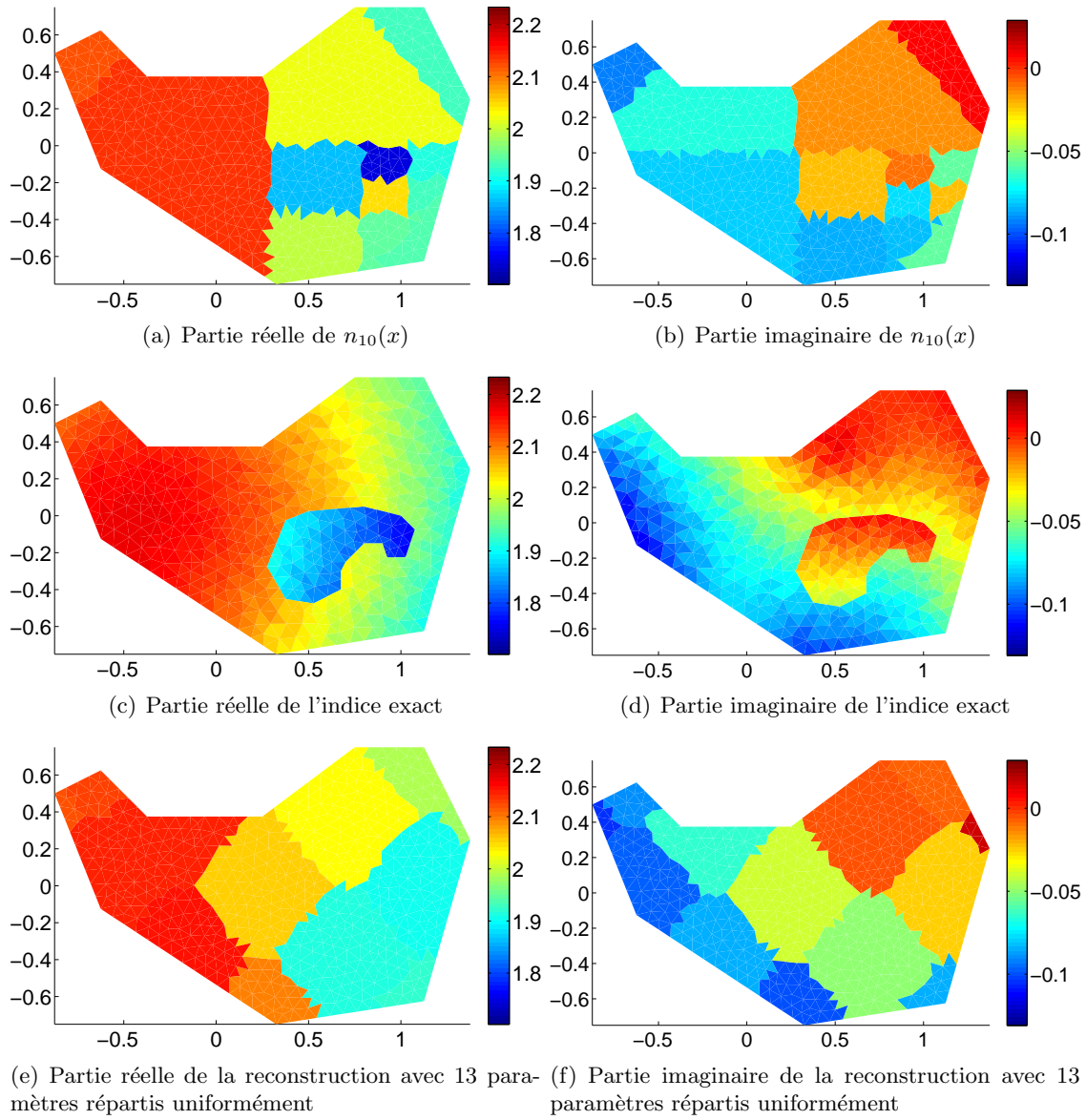


FIGURE 4.25: Comparaison du raffinement itératif avec l'indice recherché et avec une reconstruction non-adaptative sur le même nombre de zones

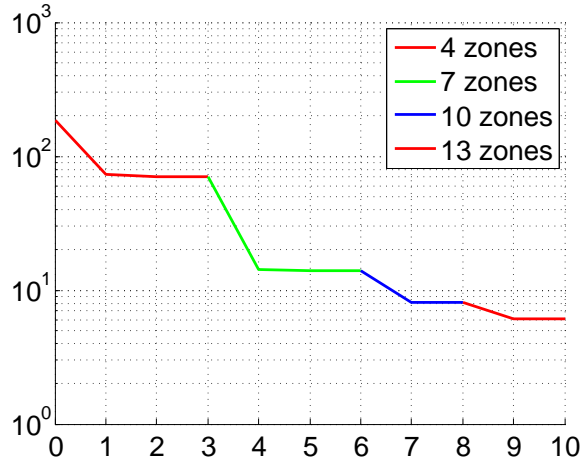


FIGURE 4.26: Valeurs de la fonction coût après chaque itération de la méthode de Gauss-Newton avec raffinements successifs

### 4.3 Un nouveau terme de fidélité

Nous nous intéressons maintenant à l'utilisation de la localisation de défauts directement comme indicateur à minimiser pour reconstruire les valeurs de l'indice.

Lorsque l'on dispose de mesures et d'un modèle reliant ces mesures à un paramètre, il est naturel de rechercher le paramètre en choisissant celui qui réduit au mieux l'écart entre la simulation par le modèle et les mesures. Comme nous l'avons fait remarquer dans la Section 4.1 de ce chapitre, le sens qu'on donne à l'expression "réduit au mieux l'écart" influe fortement sur le résultat qui en découle. Plus la mesure de cet écart est adaptée au problème, plus le résultat sera pertinent. On induit donc déjà un a priori sur ce qu'on cherche dès la définition du protocole de recherche.

Or, dans le cas précis des indices de réfraction inhomogènes, nous disposons maintenant d'un nouvel indicateur de l'adéquation entre le paramètre proposé et le paramètre recherché. En effet, les méthodes de détection de défauts du Chapitre 3 sont en mesure d'indiquer quels paramètres d'un indice  $n_p$  sont corrects par rapport aux paramètres de l'indice recherché  $n^*$ . Par exemple, si on a réussi à reconstruire les valeurs de  $n^*$  sur une partie  $\Omega$  de  $D$ , avec la fonction  $\mathcal{M}$  du Théorème 3.8 on aura

$$\mathcal{M}_{\{n_p, n^*\}}(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

avec en particulier l'identité suivante :

$$\mathcal{M}_{\{n^*, n^*\}}(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d. \quad (4.22)$$

Rappelons enfin que, contrairement à ce que peut laisser croire l'indice  $n^*$  dans l'écriture  $\mathcal{M}_{\{n_p, n^*\}}$ , l'évaluation de cette fonction pour identifier les paramètres correctement reconstruits ne requiert pas la donnée de l'indice  $n^*$ , mais seulement la donnée des mesures  $u^\infty$  qu'il induit (ou, à défaut,  $u_\varepsilon^\infty$ ). Au lieu de mesurer la distance entre la simulation et les mesures, donnée par  $\|\mathcal{F}(n) - u^\infty\|$ , on peut aussi mesurer les défauts de l'indice  $n_p$  par

rapport à l'indice  $n^*$ . Nous proposons pour cela l'utilisation de la fonction coût

$$J_{\mathcal{M}}(n) := \|\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}\|_X^2. \quad (4.23)$$

Dans un premier temps, nous allons comparer pour différents indices le comportement de la fonction coût  $J_{\mathcal{M}}$  à celui de la fonction coût  $J$  définie en (4.3). Ensuite, nous présentons deux exemples numériques de reconstruction d'indice par une méthode de Gauss-Newton régularisée appliquée à  $J_{\mathcal{M}}$ .

#### 4.3.1 Comparaison des valeurs de $J_{\mathcal{M}}$ et de $J$ dans un cas simple

Pour se faire une idée du comportement possible de la fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$  (4.23) autour du point  $n^*$ , on peut commencer par étudier ses valeurs en fonction d'un indice  $n_z$  constant dans  $D$ . Cet indice est défini par  $n_z(x) = z$  pour  $x \in D$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , et étendu par 1 en dehors de  $D$ . Nous prenons ensuite comme référence l'indice  $n^*$  défini à la Section 4.1.3 et schématisé sur la Figure 4.1.

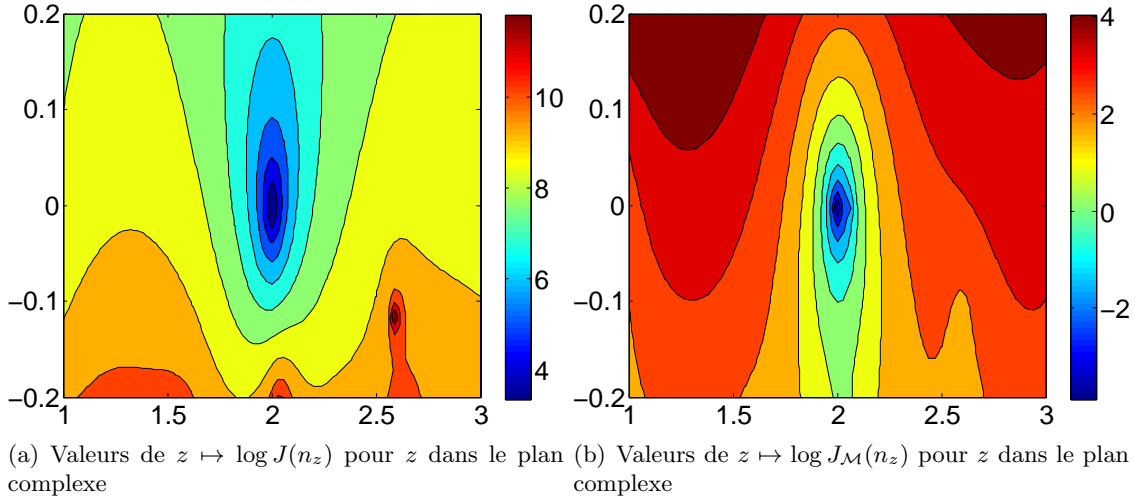


FIGURE 4.27: Comparaison de deux termes de fidélité en fonction de l'indice  $n_z$  pour  $z$  dans le plan complexe, sur un cas simple

La Figure 4.27 représente alors les courbes de niveau dans le plan complexe des (logarithmes des) fonctions  $z \mapsto J_{\mathcal{M}}(n_z)$  (4.23) et  $z \mapsto J(n_z)$  (4.3). La moyenne des valeurs de  $n^*$  dans  $D$  est estimée numériquement à 2.0148 et on constate que les deux fonctions présentent un très net bassin de valeurs décroissantes centré près de  $z = 2$ . Par ailleurs, sur la plage de valeurs complexes considérées, il ne semble pas y avoir d'autre minimum local. À une symétrie par rapport à l'axe réel près, les deux termes de fidélité ont un comportement similaire. Au moins dans le cas d'un seul paramètre complexe, on peut ainsi espérer que chercher  $n^*$  en minimisant  $J_{\mathcal{M}}$  s'avère aussi efficace que de minimiser  $J$ .

Même avec l'indice  $n^*$  présenté à la Figure 4.14 et 2% de bruit ajouté aux mesures, la Figure 4.28 amène un constat similaire. La fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$  semble seulement légèrement

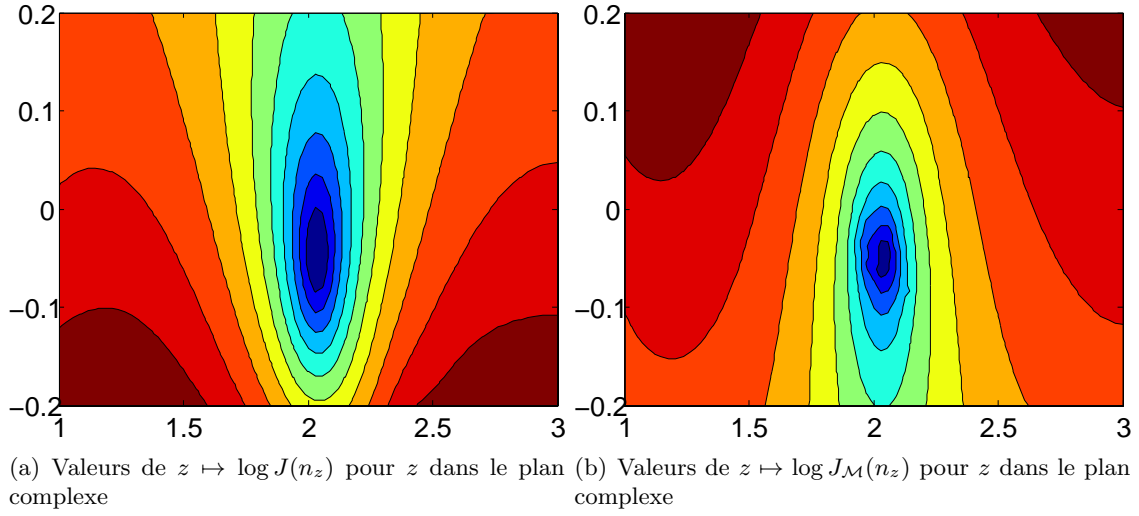


FIGURE 4.28: Comparaison de deux termes de fidélité en fonction de l'indice  $n_z$  pour  $z$  dans le plan complexe, sur un cas non-trivial avec 2% de bruit ajouté aux mesures

plus sensible au bruit que  $J$ . On peut alors s'attendre à des difficultés supplémentaires pour le calcul numérique d'une approximation de  $n^*$  en cherchant à minimiser  $J_{\mathcal{M}}$ .

Comme il est difficile de représenter les valeurs de la fonction coût pour une plage d'indices non-constants, nous proposons d'étudier son évolution dans le cas des indices particuliers d'une reconstruction par méthode de Gauss-Newton régularisée. Nous comparons alors l'évolution des fonctions coût  $J$  et  $J_{\mathcal{M}}$  sur deux des exemples traités précédemment.

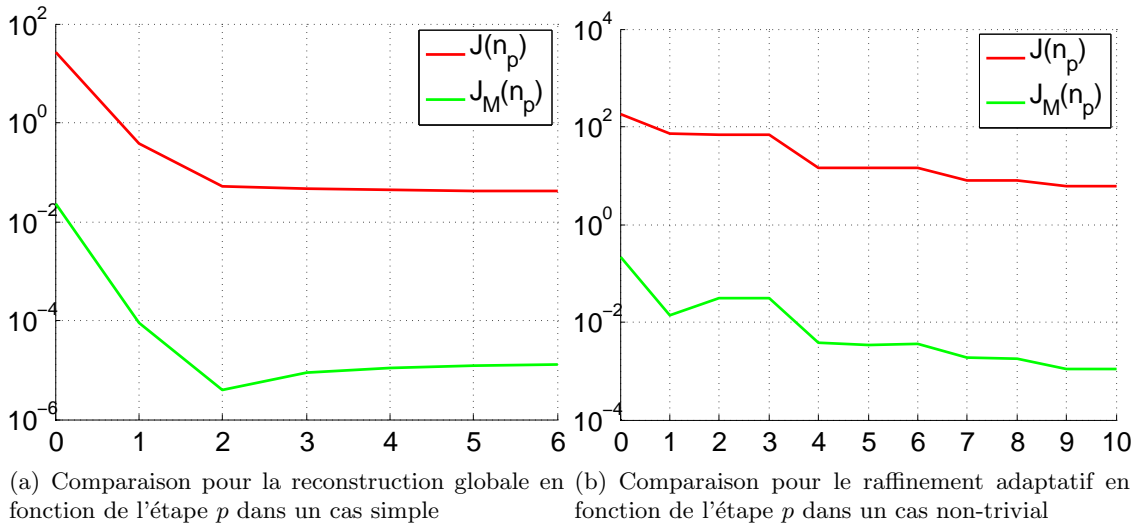


FIGURE 4.29: Comparaison de deux termes de fidélité au cours de reconstructions

La Figure 4.29(a) présente la comparaison de ces deux fonctions coût dans le cadre de la reconstruction de l'indice défini par les disques emboîtés (Figure 4.8). La première constatation très encourageante est que les deux fonctions décroissent en même temps. Il est donc

possible que la minimisation de la fonction  $J_{\mathcal{M}}$  permette de reconstruire l'indice recherché. La seconde constatation est que les petites variations apportées par la reconstruction aux étapes  $p > 2$  font remonter  $J_{\mathcal{M}}$  là où  $J$  stagne. Or ces petites variations consistent en général en l'amplification des oscillations parasites qu'on cherche à éviter. La fonction coût  $J_{\mathcal{M}}$  pourrait ainsi être un meilleur indicateur que  $J$  pour des reconstructions d'indices constants par morceaux. Le même comportement est observé sur la Figure 4.29(b) qui représente l'évolution des deux fonctions coût sur l'exemple du raffinement adaptatif pour un indice non-trivial (Figures 4.23, 4.25 et 4.26).

### 4.3.2 Une méthode de Gauss-Newton pour minimiser $J_{\mathcal{M}}$

On s'intéresse maintenant à la reconstruction pratique de l'indice par la minimisation de la fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$ .

Pour espérer la convergence d'une méthode comme celle de Gauss-Newton, il faut en premier lieu que l'indice recherché caractérise le minimum de la fonctionnelle dans le cas de données  $u^\infty$  non bruitées. Cette caractérisation n'est pas encore établie. Néanmoins, en faisant intervenir la notion de valeur propre de transmission, nous proposons le résultat suivant.

**Théorème 4.13.** *On suppose que les ensembles de directions d'émissions et de mesures coïncident ( $\Gamma_m = \Gamma_e = S^{d-1}$ ). Soient  $n_0$  et  $n^* \in L^\infty(D)$  deux indices à valeurs réelles, et soit  $\Omega := \text{support}(n^* - n_0) \subset D$ . Si, en suivant la définition 2.18,  $k^2$  n'est pas valeur propre de transmission pour la paire d'indices  $(n(x) = 1, n^*)$  dans  $\Omega$  et si*

$$\mathcal{M}_{\{n_0, n^*\}}(x) = 0, \quad \forall x \in D$$

alors on a l'alternative suivante :

- soit  $\Omega = \emptyset$  et donc  $n_0(x) = n^*(x)$ ,  $\forall x \in D$ ,
- soit  $k$  est une valeur propre de transmission pour la paire  $(n_0, n^*)$  dans  $\Omega$ .

**Démonstration :** Si  $k$  n'est pas valeur propre de transmission pour la paire  $(n_0, n^*)$ , alors par le Théorème 3.8 :  $x \notin \Omega$  est équivalent à  $\mathcal{M}_{\{n_0, n^*\}}(x) = 0$ . Ainsi, quand  $\mathcal{M}_{\{n_0, n^*\}}(x) = 0$ ,  $\forall x \in D$ , on en déduit que  $\Omega = \emptyset$  et donc par définition que  $n_0(x) = n^*(x)$ ,  $\forall x \in D$ . ■

Afin de mettre en oeuvre une des méthodes de Gauss-Newton régularisées présentées aux Sections 4.1.2-A ou 4.1.2-B, il faut pouvoir calculer la différentielle de  $\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}$  qui est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 4.14.** *Quand elle existe, la différentielle  $\mathbb{R}$ -linéaire de l'application  $n \mapsto \mathcal{M}_{\{n, n^*\}}$ , définie au Théorème 3.8, au point  $n \in L^\infty(D)$  et dans la direction  $dn \in L^\infty(D)$  est la fonction de  $L^2(D)$  donnée par*

$$\left( D\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(n) dn \right)(z) = -2 \left( \mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(z) \right)^2 \text{Re} \left\langle W^\dagger \overline{u_n(\cdot, z)}, W^\dagger (\overline{v^s} - X_0 W^\dagger \overline{u_n(\cdot, z)}) \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}, \quad (4.24)$$



où  $W^\dagger$  est un pseudo-inverse de  $|W^\infty|^{\frac{1}{2}}$ ,  $W^\infty$  étant défini en (2.5) et où  $v^s$  est la différentielle de  $u_n$  caractérisée par le système (4.8). Enfin,  $X_0$  est l'endomorphisme de  $L^2(\Gamma_e)$  défini comme la solution du système de trois équations de Sylvester

$$\begin{cases} X_\pm |\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^*| + |\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^*| X_\pm = (\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^*)(\partial_n \widetilde{W}(n) dn \pm \partial_n \widetilde{W}^*(n) dn) \\ \quad + (\partial_n \widetilde{W}(n) dn \pm \partial_n \widetilde{W}^*(n) dn)(\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^*), \\ W_{\#}^{\frac{1}{2}} X_0 + X_0 W_{\#}^{\frac{1}{2}} = X_+ + X_-, \end{cases} \quad (4.25)$$

l'opérateur  $\partial_n \widetilde{W}(n) dn$  étant défini sur  $L^2(\Gamma_e)$  par

$$\partial_n \widetilde{W}(n) dn = (I - 2ik|\gamma|^2 \partial_n W^\infty(n) dn) W^\infty + S_n \partial_n W^\infty(n) dn, \quad (4.26)$$

avec l'opérateur de scattering  $S_n$  introduit au Lemme 2.11 et

$$\partial_n W^\infty(n) dn : g \mapsto -\langle g, \overline{v^\infty} \rangle, \quad (4.27)$$

où  $v^\infty$  est la différentielle de  $\mathcal{F}$  calculée au Lemme 4.5.

**Remarque 4.15.** Comme dans le cas de la fonction  $\widetilde{G}$  pour la régularisation TV, la fonction  $\mathcal{M}$  est définie par une norme et n'est donc pas  $\mathbb{C}$ -différentiable. Par abus de notation, on identifie la différentielle du lemme ci-dessus avec l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire définie sur le produit de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels  $L^\infty(D, \mathbb{R}) \times L^\infty(D, \mathbb{R})$ .

**Démonstration :** D'après le Théorème 3.8, la fonction  $\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(z)$  est donnée par

$$\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(z) := \left\| W^\dagger \overline{u_n(\cdot, z)} \right\|^{-2}.$$

Nous procédons par étapes :

1. Pour différentier  $\mathcal{M}$  par rapport à  $n$  on introduit la fonction  $f : L^\infty(D) \rightarrow L^2(\Gamma_e)$  définie par

$$f(n) := W^\dagger \overline{u_n(\cdot, z)}. \quad (4.28)$$

En dérivant la norme au carré composée par la fonction scalaire  $x \mapsto x^{-1}$  il vient

$$D\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(n) dn = -2(\mathcal{M}_{\{n, n^*\}})^2 \text{Re} \langle f, Df(n) dn \rangle_{L^2(\Gamma_e)}. \quad (4.29)$$

2. On dérive maintenant  $f$ , qui, d'après (4.28), vérifie la relation

$$W_{\#}^{\frac{1}{2}} \cdot f(n) = \overline{u_n}. \quad (4.30)$$

En utilisant la démonstration du Lemme 4.5 et en différentiant (4.30), il vient

$$(\partial_n W_{\#}^{\frac{1}{2}}(n) dn) \cdot f(n) + W_{\#}^{\frac{1}{2}} \cdot Df(n) dn = \overline{v^s},$$

où  $v^s$  est la solution du système (4.8). On en déduit donc

$$Df(n) dn = W^\dagger \overline{v^s} - W^\dagger (\partial_n [W_{\#}^{\frac{1}{2}}](n) dn) f(n). \quad (4.31)$$



3. Il faut maintenant dériver l'opérateur  $W_{\#}^{\frac{1}{2}}$  par rapport à  $n$ . Pour ce faire, notons  $\sqrt{\cdot}$  l'application "racine" pour les opérateurs positifs auto-adjoints définie par

$$\sqrt{\cdot}(L) := L^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, on notant  $X = D\sqrt{\cdot}(A)H$  la différentielle de l'application "racine" au point  $A$  dans la direction  $H$ , l'opérateur  $X$  est la solution, quand elle existe, de l'équation de Sylvester

$$A^{\frac{1}{2}}X + XA^{\frac{1}{2}} = H. \quad (4.32)$$

Ainsi, si  $W_{\#}$  n'est pas nul, on obtient

$$\partial_n W_{\#}^{\frac{1}{2}}(n) dn = D\sqrt{\cdot}(W_{\#}) \partial_n W_{\#}(n) dn = X_0,$$

ou  $X_0$  est la solution de l'équation

$$W_{\#}^{\frac{1}{2}}X_0 + X_0W_{\#}^{\frac{1}{2}} = \partial_n W_{\#}(n) dn. \quad (4.33)$$

De plus, l'opérateur  $W_{\#}$  est défini au Théorème 3.8 par  $W_{\#} = |\widetilde{W} + \widetilde{W}^{\star}| + |\widetilde{W} - \widetilde{W}^{\star}|$ . Or, la valeur absolue d'un opérateur  $L$  étant définie par  $|L| = (L^{\star}L)^{\frac{1}{2}}$ , on a

$$|\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^{\star}| = \sqrt{\cdot} \circ C(\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^{\star}), \quad (4.34)$$

où l'application "carré"  $C$  est définies sur  $\mathcal{L}(\Gamma_e, \Gamma_m)$  par

$$C(L) := L^{\star}L.$$

Alors, en développant (4.34) et en utilisant (4.32), il suit que  $\partial_n W_{\#}(n) dn$  est donnée par la différentielle

$$\partial_n W_{\#}(n) dn = X_+ + X_-, \quad (4.35)$$

où  $X_{\pm}$  est la solution de

$$\begin{aligned} X_{\pm} |\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^{\star}| + |\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^{\star}| X_{\pm} &= (\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^{\star})(\partial_n \widetilde{W}(n) dn \pm \partial_n \widetilde{W}^{\star}(n) dn) \\ &\quad + (\partial_n \widetilde{W}(n) dn \pm \partial_n \widetilde{W}^{\star}(n) dn)(\widetilde{W} \pm \widetilde{W}^{\star}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

On obtient ainsi la différentielle de  $W_{\#}^{\frac{1}{2}}$  en combinant (4.36), (4.35) et (4.33) pour former le système (4.25).

4. La dernière étape est la dérivation de  $\widetilde{W}$  par rapport à  $n$ . De par sa définition à la Proposition 2.14, cet opérateur est le produit de l'opérateur de scattering  $S_n$ , défini au Lemme 2.11, par la différence des champ lointains, notée précédemment  $W^{\infty}$ . Avec les indices  $n$  et  $n^{\star}$ , il vient

$$\begin{aligned} S_n &= I + 2ik|\gamma|F_n, \\ W^{\infty} &= F_{n^{\star}} - F_n. \end{aligned}$$

De plus, avec les notations de ce chapitre, l'opérateur de champ lointain  $F_n$  (1.16) est le produit scalaire par  $\overline{\mathcal{F}(n)(\cdot, \hat{x})}$

$$F_n g(\hat{x}) = \left\langle g, \overline{\mathcal{F}(n)(\cdot, \hat{x})} \right\rangle. \quad (4.37)$$

Sa différentielle par rapport à  $n$  est alors le produit scalaire par la (conjugaison complexe de la) différentielle de  $\mathcal{F}$ . Comme indiqué dans la démonstration du Lemme 4.5, ceci est le champ lointain  $v^\infty$  de la solution au système (4.8). La différentielle de  $W^\infty$  dans la direction  $dn$  est alors définie sur  $L^2(\Gamma_e)$  par (4.27) et il s'en suit celle de  $\widetilde{W}$ , définie par (4.26) .

■

Pour les raisons présentées dans la Section 3.3, il apparaît plus intéressant d'utiliser l'opérateur  $|W^\infty|$  au lieu de  $W_\#$  dans la construction de la fonction  $M_{\{n,n^*\}}$ . Ainsi, on donne l'expression de sa différentielle dans ce cas qui sera utilisé par la suite.

**Corollaire 4.16.** *Quand elle existe, la différentielle  $\mathbb{R}$ -linéaire de l'application  $n \mapsto \mathcal{M}_{\{n,n^*\}}$  construite autour de l'opérateur  $|W^\infty|$ , au point  $n \in L^\infty(D)$  et dans la direction  $dn \in L^\infty(D)$  est la fonction de  $L^2(D)$  donnée par*

$$\left( D\mathcal{M}_{\{.,n^*\}}(n) dn \right)(z) = -2 \left( \mathcal{M}_{\{n,n^*\}}(z) \right)^2 \operatorname{Re} \left\langle W^\dagger \overline{u_n(\cdot, z)}, W^\dagger (\overline{v^s} - X_0 W^\dagger \overline{u_n(\cdot, z)}) \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}, \quad (4.38)$$

où  $W^\dagger$  est un pseudo-inverse de  $|W^\infty|^{\frac{1}{2}}$ ,  $W^\infty$  étant défini en (2.5) et où  $v^s$  est la différentielle de  $u_n$  caractérisée par le système (4.8). Enfin,  $X_0$  est l'endomorphisme de  $L^2(\Gamma_e)$  défini comme la solution du système d'équations de Sylvester

$$\begin{cases} |W| X_1 + X_1 |W| &= (W^\infty)^* (\partial_n W^\infty(n) dn) + (\partial_n W^\infty(n) dn)^* W^\infty, \\ |W|^{\frac{1}{2}} X_0 + X_0 |W|^{\frac{1}{2}} &= X_1, \end{cases} \quad (4.39)$$

l'opérateur  $\partial_n W^\infty(n) dn$  étant défini en (4.27).

**Démonstration :** La démonstration suit point par point celle du Lemme 4.14, seule est à recalculer l'étape 3 pour l'opérateur  $|W^\infty|$  :

3'. En reprenant (4.34), on a

$$|W^\infty|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\cdot} \circ \sqrt{\cdot} \circ C(W^\infty). \quad (4.40)$$

Alors, si  $W^\infty$  n'est pas nul (c'est-à-dire si  $n \neq n^*$ ), il s'en suit en appliquant deux fois (4.32) que l'application  $\partial_n W^\infty(n) dn$  est donnée par la solution au système (4.39).

■

Avec la différentielle de  $\mathcal{M}_{\{.,n^*\}}$ , il est maintenant possible de linéariser cette application dans la fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$  afin de rechercher l'indice  $n^*$  par une méthode de Gauss-Newton régularisée. En considérant par exemple la régularisation  $TV$  présentée à la Section 4.1.2-B, on construit donc la suite d'indices

$$n_{p+1} := n_p + dn_p, \quad (4.41)$$

où le terme de mise à jour  $dn_p$  est le minimiseur de l'équation normale (non-linéaire dans le cas de la régularisation  $TV$ )

$$\mathcal{J}_{\mathcal{M}}(dn) := \left\| \mathcal{M}_{\{n_p, n^*\}} + D\mathcal{M}_{\{.,n^*\}}(n_p) dn \right\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \left\| \sqrt{|\nabla dn|^2 + \beta} \right\|_{L^1(D)}. \quad (4.42)$$

Comme pour (4.14),  $\beta > 0$  est un (petit) paramètre de lissage pour rendre la régularisation différentiable. La direction de descente  $dn_p$  peut alors être calculée par une méthode de Newton classique.

### 4.3.3 Exemples d'application

Nous illustrons maintenant les résultats obtenus en reconstruisant un indice par la méthode de Gauss-Newton régularisée (4.42) qui cherche à minimiser la fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$  (4.23).

Pour ce faire, nous reprenons l'indice simple présenté à la Section 4.2.1 et une estimation initiale  $n_0$  fixée à  $n_0 = 2$  dans  $D$ . Cet indice est réel et en prenant des ensembles de directions d'émissions et de mesures recouvrant  $S^1$  nous sommes ainsi dans le cadre du Théorème 3.8 qui établit que  $\mathcal{M}_{\{.,n^*\}}$  est bien une fonction de localisation des défauts. Par ailleurs, comme pour les exemples précédents, le nombre d'onde reste fixé à  $k = 6$  et le terme de régularisation  $\lambda$  est choisi pour décroître avec le nombre d'itération en étant comparable au centième de la norme de la matrice à inverser :

$$\lambda_p := \frac{\|(D\mathcal{M}_{\{n_p, n^*\}})^* D\mathcal{M}_{\{n_p, n^*\}}\|}{100p} \quad (4.43)$$

La Figure 4.30 permet alors de comparer les résultats qu'on obtient dans exactement les mêmes conditions en utilisant l'équation normale (4.14) ou l'équation normale (4.42). On constate tout d'abord que, sur cet exemple, la fonctionnelle  $J$  (4.3) évolue très peu après la seconde itération. Comparativement, la progression de la fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$ , définie en (4.23), est plus lente mais il ne faut pas perdre de vue que ces deux fonctionnelles ne mesurent pas la même chose. D'ailleurs, la reconstruction obtenue en minimisant  $J_{\mathcal{M}}$  semble (au moins visuellement) de meilleure qualité que celle obtenue par la minimisation de  $J$ . En effet, on voit sur la Figure 4.31(b) nettement plus d'oscillations parasites dans la grande zone où l'indice exact vaut 2 que sur la Figure 4.31(d), malgré l'utilisation d'une régularisation en variation totale. Ce premier exemple de reconstruction est donc très encourageant.

Nous considérons alors un second exemple avec la reconstruction de l'indice  $n^*$  présenté sur la Figure 4.14 avec des mesures perturbées par l'ajout de 2% de bruit uniforme. On suppose connaître une bonne approximation de la moyenne des valeurs de  $n^*$  et nous utilisons cette valeur comme estimation initiale en fixant  $n_0 = 2$  dans  $D$ . Cependant, même si cette estimation initiale est réelle, l'indice recherché est à valeurs complexes et nous n'avons plus de garantie sur le lien entre la fonction  $\mathcal{M}_{\{.,n^*\}}$  et la localisation des défauts.

Pour autant, on voit sur la Figure 4.31 des résultats similaires à ceux de la Figure 4.30. En effet, sur cet exemple aussi, la fonctionnelle  $J$  (4.3) stagne après deux itérations alors que l'évolution de la fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$  est plus lente mais permet au final de gagner un ordre de grandeur supplémentaire. De même, la reconstruction sur la Figure 4.31(d) présente moins d'oscillations et semble visuellement plus proche de l'indice recherché. La reconstruction

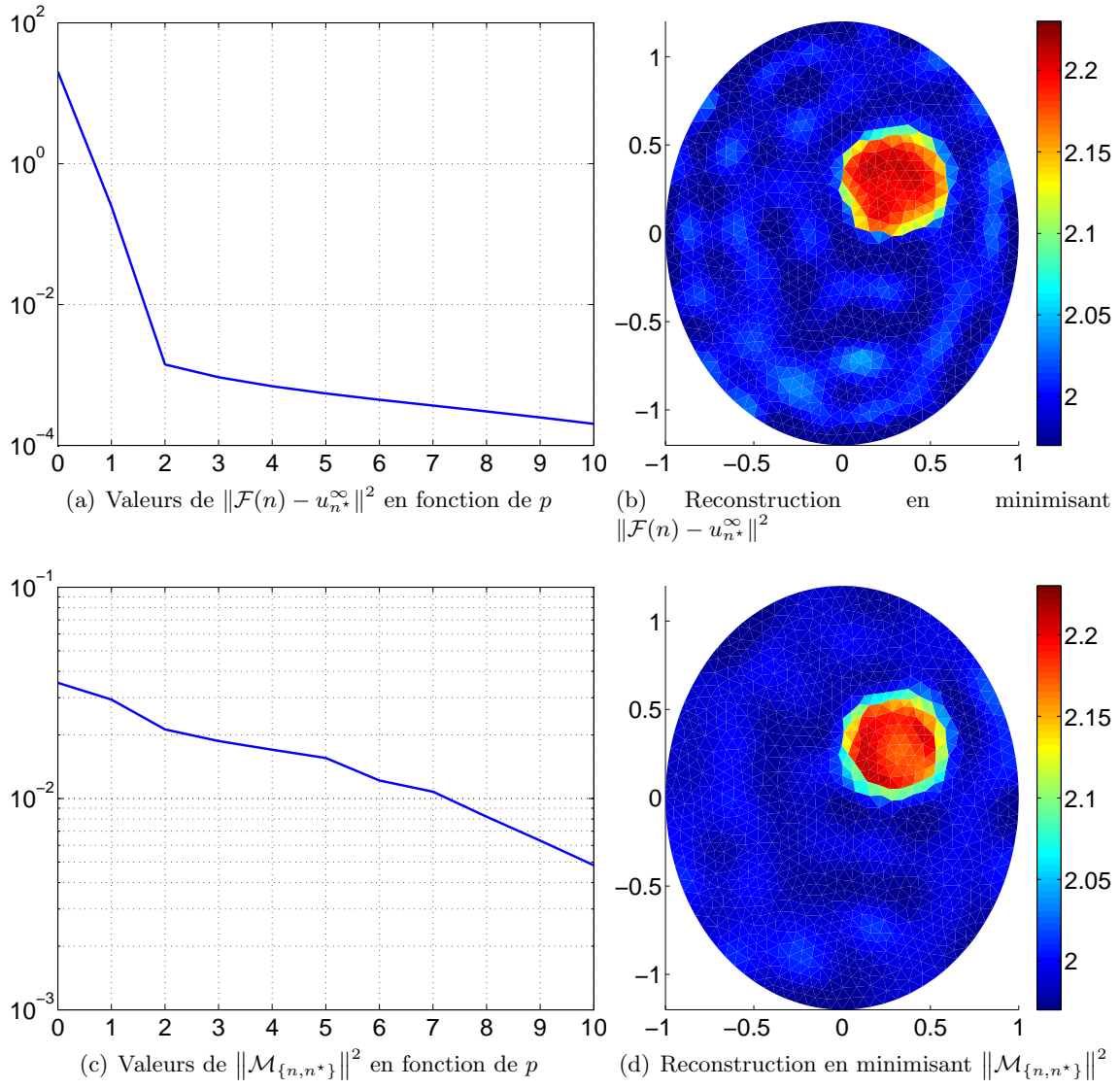


FIGURE 4.30: Comparaison des reconstructions par minimisation de  $J$  et de  $J_{\mathcal{M}}$  dans un cas simple

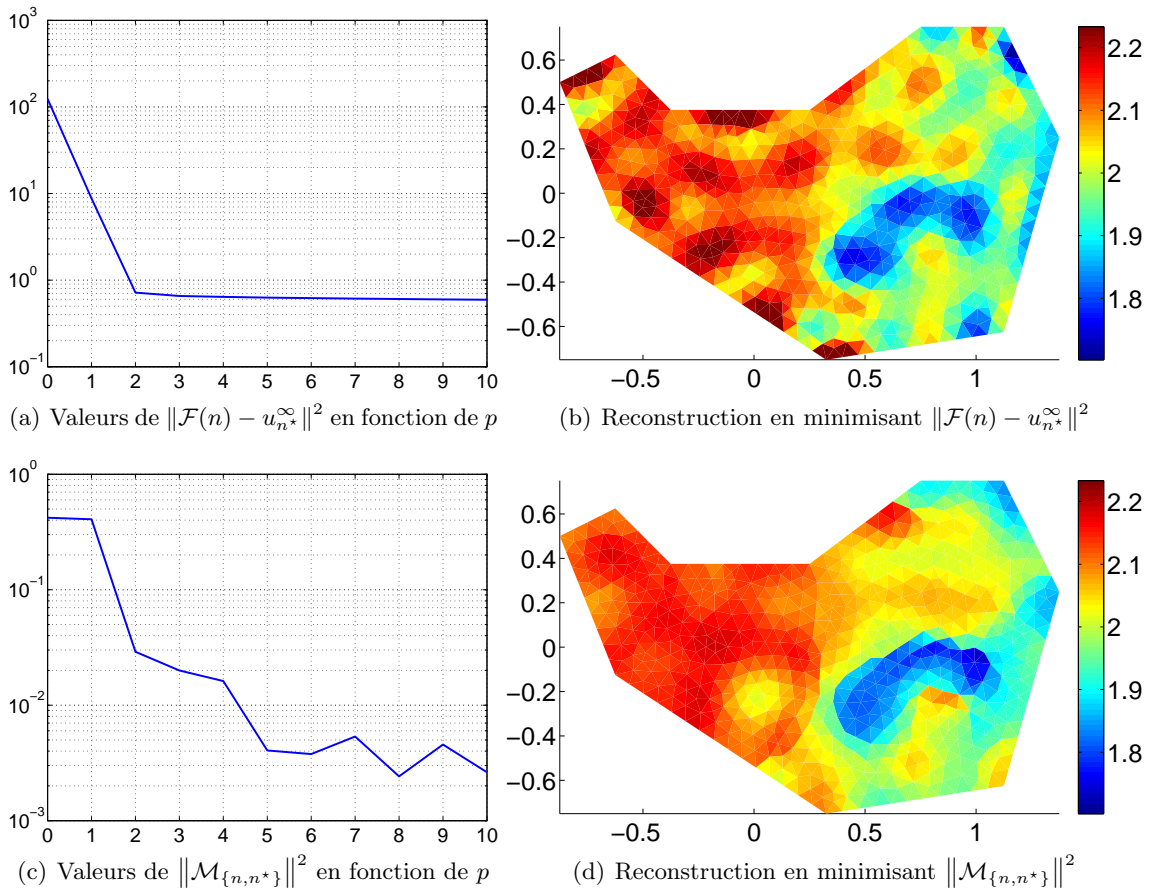


FIGURE 4.31: Comparaison des reconstructions par minimisation de  $J$  et de  $J_{\mathcal{M}}$  dans un cas non-trivial

obtenue en minimisant  $J_{\mathcal{M}}$  semble (au moins visuellement) de meilleure qualité que celle obtenue par la minimisation de  $J$ .

Nous avons donc présenté avec cet exemple un cas où la reconstruction obtenue en minimisant la norme de  $\mathcal{M}_{\{n,n^*\}}$  donne un résultat plus satisfaisant qu'avec la fonctionnelle  $J$  classique. Cependant, ce résultat est à tempérer par certains facteurs qui n'apparaissent pas sur la Figure 4.31. En particulier, le calcul de la différentielle  $D\mathcal{M}_{\{.,n^*\}}(n)$  donnée au Corollaire 4.16 présente de grandes instabilités numériques. Ces instabilités semblent dues majoritairement au calcul de la différentielle du pseudo-inverse. Pour obtenir des calculs convergents nous avons réduit le nombre de directions d'émissions/réceptions à 12 (pour un total de 144 mesures). Le fait d'obtenir une reconstruction satisfaisante avec peu de mesures est évidemment très intéressant du point de vue pratique. Mais à partir de 20 directions d'émissions/réceptions, le conditionnement global de la différentielle explose et la reconstruction de l'indice n'est plus possible. La consistance globale de cette méthode reste donc à étudier afin de cerner son cadre de validité.



---

## Conclusion

---

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de certains problèmes inverses en propagation d'ondes acoustiques.

La première partie de ce travail a porté sur la localisation de défauts à partir de mesures de champ lointain. Le terme "défaut" désigne une différence entre l'indice actuel et un indice de référence. Le résultat principal qui est démontré est la caractérisation du support d'un défaut à partir de tests sur un opérateur défini comme la différence entre les mesures effectives et des valeurs de référence (correspondant à l'indice sans défauts). Pour ce faire, dans un premier temps, il a été montré la possibilité d'affirmer si un point se situe (ou non) dans le support des défauts par l'appartenance (ou non) d'une fonction test bien choisie à l'image d'un opérateur représentant le rayonnement en champ lointain, pour l'indice non perturbé, de la restriction d'une source au support des défauts. Par ailleurs, on montre que la fonction test à utiliser peut être obtenue directement, et donc calculée numériquement par la suite, comme une solution d'un problème de Helmholtz bien déterminé. Dans un second temps, l'opérateur précédemment introduit est mis en évidence dans une factorisation de l'opérateur représentant la différence des mesures. Cependant, cette factorisation, en l'état, ne nous permet pas a priori de construire un test explicite de localisation de défauts à partir de l'opérateur de mesures. Alors, par combinaison avec l'opérateur de scattering pour l'indice non perturbé, nous construisons un nouvel opérateur admettant une factorisation symétrique, au moins dans le cas d'indices réels et pour un ensemble d'émissions/réceptions complet, comparable à celui de rayonnement caractérisant le support des défauts. Il s'en suit finalement une identification de ce support basée sur les mesures.

Dans le chapitre suivant, nous avons développé et validé numériquement différentes approches numériques exploitant la caractérisation précédente. Elle a ainsi été tout d'abord reformulée comme un problème de minimisation sous contrainte, au point à tester, et donnant alors une fonction dont le support coïncide avec le lieu des défauts à retrouver. Cette nouvelle formulation étend la "Factorization Method" à la localisation d'inclusions dans des milieux inhomogènes. Nous avons alors successivement proposé deux schémas permettant cette localisation. Le premier est basé sur la résolution du problème de minimisation (par méthode de plus profonde descente ou de gradient projeté), et le second sur une décomposition spectrale (par décomposition en valeurs singulières) de l'opérateur de mesures modifié. Toutefois, bien que donnant des résultats numériques très satisfaisants, la construction de ces méthodes nécessite des ensembles de mesures et de réceptions identiques. Ainsi, afin de

---



proposer un cadre d'application étendu et plus réaliste, nous avons proposé une troisième méthode basée sur un opérateur de mesures simplifié qui a été appliquée à des données issues d'indices complexes et pour des ensembles d'émissions/réceptions distincts.

Enfin, la dernière partie s'intéresse à la reconstruction des valeurs d'un indice de réfraction. Nous y présentons plusieurs méthodes exploitant les résultats des chapitres précédents afin d'améliorer cette reconstruction par des méthodes de Gauss-Newton avec régularisation  $L^2$  ou en variation totale. Ainsi, dans une première méthode nous étudions le cas de la modification locale par rapport à une carte de référence. Pour ce faire, nous commençons par déterminer la zone de cette modification par seuillage de la cartographie des défauts. La recalcul de l'indice n'est alors effectué que sur cette zone et une seconde évaluation de la cartographie des défauts avec ce nouvel indice nous fournit une estimation qualitative a posteriori sur la qualité de cette reconstruction. En considérant l'erreur de reconstruction dans une étape donnée du processus de Gauss-Newton comme des défauts par rapport à l'indice à obtenir, nous obtenons via les méthodes précédentes une estimation qualitative locale sur le résultat de l'étape en cours. Ainsi, nous proposons un processus itératif dans lequel le nombre de zones sur lesquelles l'indice est recherché est augmenté progressivement par des découpages successifs basés sur cette estimation qualitative. Pour finir, nous envisageons, à travers la mise en place d'un algorithme, la possibilité d'exploiter l'information locale donnée par la fonction de localisation des défauts comme une nouvelle fonction coût pour l'algorithme de Gauss-Newton. Les exemples numériques présentés semblent indiquer que cette dernière piste est intéressante.

## Perspectives

Loin de clore le sujet, les travaux menés au cours de cette thèse suscitent de nombreuses perspectives.

Tout d'abord, il reste à étendre le résultat théorique de localisation des défauts à des indices non réels et surtout à autoriser des directions de mesures et d'émissions ne recouvrant pas entièrement la sphère unité et éventuellement sur des sous-ensembles distincts. Ces limitations apparaissent, essentiellement pour des raisons techniques, lors de la composition par l'opérateur de scattering afin d'obtenir une factorisation du nouvel opérateur qui soit symétrique et de le rendre comparable à celui de rayonnement caractérisant le support des défauts. Pour ceci, plusieurs options sont envisagées. On pourrait par exemple commencer par chercher un nouvel opérateur de combinaison qui cependant risque fortement de ne pas présenter les propriétés nécessaires à l'établissement du résultat. Dans ce cas, il est possible d'espérer affaiblir ces propriétés en utilisant par exemple la notion de  $T$ -coercivité (voir par exemple définition dans [Bonnet-Ben Dhia *et al.* 2010]). Cependant, cette piste ne nous a pas permis pour l'instant de formuler une comparaison exploitable par la suite. Une autre possibilité serait de démontrer par continuité et par coercivité, que la valeur absolue de l'opérateur de mesures est comparable au champ total mesuré sur le support des défauts. En effet, pour ce dernier opérateur nous avons pu proposer, et valider sur des exemples, un algorithme traitant naturellement les indices non-réels et les directions d'émission/réception distinctes.

Un deuxième point à étudier serait l'allègement des données nécessaires à la méthode en vue de certaines applications telles que la détection d'objets mouvants derrière un mur. Ainsi, il est demandé de connaître les mesures en champ lointain effectuées sur l'objet avant et après l'apparition de défauts, mais aussi le champ proche à l'intérieur de l'objet avant l'apparition de ces défauts qui est calculé sur nos exemples à partir de l'indice correspondant. L'objectif serait de se passer de la connaissance de cette dernière information. Pour ce faire, on pourrait par exemple envisager de coupler la méthode de détection des défauts avec des techniques de reconstruction de champ proche à partir de champ lointain (par exemple, en s'inspirant de [Colton & Kress 2006]). En remplaçant le champ proche exact par un champ proche reconstruit, se poserait alors la question du fonctionnement ou non de la localisation des défauts pour des fonctions test inexactes. Cependant, les exemples traitant la sensibilité par rapport à l'incertitude sur l'indice de référence ont montré une certaine robustesse de la méthode par rapport à la génération des fonctions test.

Enfin, une dernière perspective à propos de la localisation de défauts est de l'adapter aux exigences des dispositifs pratiques de mesures. En effet, mettre en place un grand nombre de capteurs est difficile, alors que, par exemple pour les radars de type MIMO ("Multiple In, Multiple Out"), il est possible d'effectuer des mesures sur de larges bandes de fréquence. Le but serait ainsi d'utiliser cette information multi-fréquentielle pour disposer d'un grand nombre d'informations en évitant les difficultés induites par la mise en place d'un grand nombre de capteurs. Pour ceci on pourrait envisager de proposer un relèvement en temps (formel) de la méthode, puis introduire la prise en compte des données multi-fréquentielles, par exemple à l'aide d'une approximation de la transformée de Fourier inverse.

La seconde partie des perspectives est liée à la reconstruction d'indice.

Dans un premier temps, il faudrait étudier la convergence des méthodes de réduction du nombre de variables d'optimisation proposées. Concernant l'identification des valeurs de défauts, l'algorithme de recherche des valeurs dans les zones sélectionnées est de type Gauss-Newton, sur lequel on pourrait donc espérer appliquer les résultats de convergence existants. Cependant, cette reconstruction ne traite qu'une sous-partie de l'indice et il faudrait alors avoir une estimation de la convergence globale des indices composés des valeurs connues et de la reconstruction des défauts vers l'indice perturbé complet, ou à défaut une estimation de stabilité en fonction du paramètre de seuillage. Pour le raffinement adaptatif, il serait nécessaire de démontrer la convergence du processus cyclique complet, sachant que chacun de ces cycles peut être compatible avec les hypothèses appliquées à la méthode de Gauss-Newton. Toutefois, les exemples numériques présentés pour valider ces deux schémas semblent montrer un comportement global satisfaisant.

Dans un deuxième temps, il resterait à approfondir l'étude de la nouvelle fonction coût proposée au Chapitre 4 pour la reconstruction itérative d'indice. Il faudrait notamment établir sa régularité, c'est-à-dire son espace de définition, par rapport à la variable d'espace ainsi qu'établir son ensemble de dérivabilité par rapport à l'indice et enfin justifier la convergence de la méthode de Gauss-Newton. En particulier, dans le cas d'indices continus (qui n'est pas le cas étudié) on peut montrer que la fonction des défauts est continue par rapport à la variable d'espace. En outre, en considérant la fonction de localisation des dé-

fautes utilisée comme une fonction indicatrice, il serait intéressant de définir la fonction coût en utilisant une norme  $L^1$  au lieu de la norme  $L^2$  pour mesurer explicitement le support des défauts. Ceci nécessiterait toutefois de reformuler, a priori, entièrement l'algorithme proposé. Enfin une dernière propriété évoquée dans ce manuscrit qu'il serait intéressant de valider serait la parallélisation de la reconstruction d'indices rendue a priori possible par le caractère local des informations utilisées par la nouvelle fonction coût.

Pour finir, dans le cadre de la construction de cette nouvelle fonction coût, un théorème d'unicité avec une alternative basée sur les valeurs propres de transmission a été proposé, mais avec des hypothèses assez restrictives (indices réels et émissions/réceptions sur toute la sphère). Une première perspective serait ainsi de préciser le lien entre cette unicité et les valeurs propres de transmission, voire éventuellement d'aboutir à un résultat sans alternative. En particulier, l'extension de la méthode à des indices non-réels entraînerait l'absence de valeurs propres de transmission, et il s'en suivrait alors un résultat d'unicité bien défini. Comme dernière perspective, la méthode pourrait être étendue à des ensembles de directions de mesures et d'émissions distincts afin d'en élargir le cadre d'application. Ceci serait notamment une conséquence immédiate de la réalisation des perspectives annoncées pour la méthode de localisation de défauts.

---

---

## Bibliographie

---

- [Arens 2004] T. Arens. *Why linear sampling works*. Inverse Problems, vol. 20, page 163, 2004.
- [Bakushinsky & Kokurin 2004] A.B. Bakushinsky et M.Y. Kokurin. Iterative methods for approximate solution of inverse problems, volume 577. Kluwer Academic Publishing, 2004.
- [Bakushinsky 1992] A.B. Bakushinsky. *The problem of the convergence of the iteratively regularized Gauss-Newton method*. Computational mathematics and mathematical physics, vol. 32, no. 9, pages 1353–1359, 1992.
- [Barucq *et al.* 2010] H. Barucq, C. Bekkey et R. Djellouli. *A multi-step procedure for enriching limited two-dimensional acoustic far-field pattern measurements*. J. Inverse Ill-Posed Probl., vol. 18, no. 2, pages 189–216, 2010.
- [Bazán & Francisco 2009] Fermín S. Viloche Bazán et Julianio B. Francisco. *An improved fixed-point algorithm for determining a Tikhonov regularization parameter*. Inverse Problems, vol. 25, no. 4, pages 045007, 16, 2009.
- [Berenger 1994] J.P. Berenger. *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*. Journal of computational physics, vol. 114, no. 2, pages 185–200, 1994.
- [Björck 1996] Å. Björck. Numerical methods for least squares problems. Society for Industrial Mathematics, 1996.
- [Blaschke *et al.* 1997] Barbara Blaschke, Andreas Neubauer et Otmar Scherzer. *On convergence rates for the iteratively regularized Gauss-Newton method*. IMA J. Numer. Anal., vol. 17, no. 3, pages 421–436, 1997.
- [Bonnans *et al.* 2006] J.F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal et C.A. Sagastizábal. Numerical optimization. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 2006. Theoretical and practical aspects.
- [Bonnet-Ben Dhia *et al.* 2010] A.S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr et CM Zwolf. *Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234, no. 6, pages 1912–1919, 2010.
- [Bruno & Hyde 2004] O.P. Bruno et E.M.K. Hyde. *An efficient, preconditioned, high-order solver for scattering by two-dimensional inhomogeneous media*. Journal of Computational Physics, vol. 200, no. 2, pages 670–694, 2004.
-

- 
- [Cakoni & Colton 2003] F. Cakoni et D. Colton. *On the mathematical basis of the linear sampling method*. Georgian Math. J., vol. 10, no. 3, pages 411–425, 2003. Dedicated to the 100th birthday anniversary of Professor Victor Kupradze.
- [Cakoni & Colton 2006] F. Cakoni et D. Colton. Qualitative methods in inverse scattering theory. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. An introduction.
- [Cakoni *et al.* 2002] F. Cakoni, D. Colton et H. Haddar. *The linear sampling method for anisotropic media*. Journal of computational and applied mathematics, vol. 146, no. 2, pages 285–299, 2002.
- [Chan & Chen 2006] T.F. Chan et K. Chen. *An optimization-based multilevel algorithm for total variation image denoising*. Multiscale Modeling and Simulation, vol. 5, no. 2, page 615, 2006.
- [Chan & Esedoğlu 2005] T.F. Chan et S. Esedoğlu. *Aspects of total variation regularized  $L^1$  function approximation*. SIAM J. Appl. Math., vol. 65, no. 5, pages 1817–1837 (electronic), 2005.
- [Chavent & Kunisch 1997] G. Chavent et K. Kunisch. *Regularization of linear least squares problems by total bounded variation*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., vol. 2, pages 359–376 (electronic), 1997.
- [Clason *et al.* 2010] C. Clason, Ba. Jin et K. Kunisch. *A semismooth Newton method for  $L^1$  data fitting with automatic choice of regularization parameters and noise calibration*. SIAM J. Imaging Sci., vol. 3, no. 2, pages 199–231, 2010.
- [Clayton & Engquist 1980] R.W. Clayton et B. Engquist. *Absorbing boundary conditions for wave-equation migration*. Geophysics, vol. 45, no. 5, pages 895–904, 1980.
- [Collino *et al.* 2002] F. Collino, M'B. Fares et H. Haddar. *On the validation of the linear sampling method in electromagnetic inverse scattering problems*. Research Report 4665, INRIA, 2002.
- [Colton & Kress 1998] D. Colton et R. Kress. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 1998.
- [Colton & Kress 2006] D. Colton et R. Kress. *Using fundamental solutions in inverse scattering*. Inverse Problems, vol. 22, pages R49–R66, 2006.
- [Colton & Monk 1988] D. Colton et P. Monk. *The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium*. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 41, no. 1, page 97, 1988.
- [Colton & Monk 1992] D. Colton et P. Monk. *A comparison of two methods for solving the inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium*. Journal of computational and applied mathematics, vol. 42, no. 1, pages 5–16, 1992.
- [Colton *et al.* 1997] D. Colton, M. Piana et R. Potthast. *A simple method using Morozov's discrepancy principle for solving inverse scattering problems*. Inverse Problems, vol. 13, no. 6, pages 1477–1493, 1997.
- [Colton 2003] D. Colton. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. In Gunther Uhlman, editeur, Inside out : inverse problems and applications, volume 47 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 67–110. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
-

- 
- [Coyle 2000] J. Coyle. *Locating the support of objects contained in a two-layered background medium in two dimensions*. Inverse Problems, vol. 16, page 275, 2000.
- [Dah 2001] B. Dah. *Sur la modélisation de milieux fictifs absorbants de type couches de Bérenger*. PhD thesis, Université Toulouse III, 2001.
- [Egger *et al.* 2010] H. Egger, M. Hanke, C. Schneider, J. Schöberl et S. Zaglmayr. *Adjoint-based sampling methods for electromagnetic scattering*. Inverse Problems, vol. 26, no. 7, pages 074006, 17, 2010.
- [Engl *et al.* 1989] H.W. Engl, K. Kunisch et A. Neubauer. *Convergence rates for Tikhonov regularisation of non-linear ill-posed problems*. Inverse Problems, vol. 5, page 523, 1989.
- [Engl *et al.* 1996] H.W. Engl, M. Hanke et A. Neubauer. *Regularization of inverse problems*, volume 375. Springer Netherlands, 1996.
- [Fink & Prada 2001] M. Fink et C. Prada. *Acoustic time-reversal mirrors*. Inverse problems, vol. 17, page R1, 2001.
- [Gebauer *et al.* 2008] Bastian Gebauer, Martin Hanke et Christoph Schneider. *Sampling methods for low-frequency electromagnetic imaging*. Inverse Problems, vol. 24, no. 1, pages 015007, 18, 2008.
- [Gebauer 2006] B. Gebauer. *The factorization method for real elliptic problems*. Z. Anal. Anwend., vol. 25, no. 1, pages 81–102, 2006.
- [Grinberg 2006] N.I. Grinberg. *The operator factorization method in inverse obstacle scattering*. Integral Equations and Operator Theory, vol. 54, no. 3, pages 333–348, 2006.
- [Hakula & Hyvönen 2009] H. Hakula et N. Hyvönen. *On computation of test dipoles for factorization method*. BIT Numerical Mathematics, vol. 49, no. 1, pages 75–91, 2009.
- [Hanke 1996] Martin Hanke. *Limitations of the L-curve method in ill-posed problems*. BIT, vol. 36, no. 2, pages 287–301, 1996.
- [Hansen & O’Leary 1993] P.C. Hansen et D.P. O’Leary. *The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems*. SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 14, page 1487, 1993.
- [Hansen 1998] P.C. Hansen. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion*. Society for Industrial Mathematics, 1998.
- [Hazard & Ramdani 2004] C. Hazard et K. Ramdani. *Selective acoustic focusing using time-harmonic reversal mirrors*. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 64, no. 3, pages 1057–1076, 2004.
- [Hislop & Sigal 1996] P.D. Hislop et I.M. Sigal. *Introduction to spectral theory : With applications to Schrödinger operators*. Springer, 1996.
- [Hofmann *et al.* 2007] B. Hofmann, B. Kaltenbacher, C. Poeschl et O. Scherzer. *A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators*. Inverse Problems, vol. 23, page 987, 2007.
- [Hohage 1997] T. Hohage. *Logarithmic convergence rates of the iteratively regularized Gauss-Newton method for an inverse potential and an inverse scattering problem*. Inverse Problems, vol. 13, no. 5, pages 1279–1299, 1997.
- [Hohage 2001] T. Hohage. *On the numerical solution of a three-dimensional inverse medium scattering problem*. Inverse Problems, vol. 17, no. 6, pages 1743–1763, 2001.
-

- 
- [Hyde & Bruno 2005] E.M.K. Hyde et O.P. Bruno. *A fast, higher-order solver for scattering by penetrable bodies in three dimensions*. Journal of Computational Physics, vol. 202, no. 1, pages 236–261, 2005.
- [Hyvönen *et al.* 2007] N. Hyvönen, H. Hakula et S. Pursiainen. *Numerical implementation of the factorization method within the complete electrode model of electrical impedance tomography*. Inverse Probl. Imaging, vol. 1, no. 2, pages 299–317, 2007.
- [Hyvönen 2007] N. Hyvönen. *Application of the factorization method to the characterization of weak inclusions in electrical impedance tomography*. Adv. in Appl. Math., vol. 39, no. 2, pages 197–221, 2007.
- [Kaltenbacher *et al.* 2008] B. Kaltenbacher, A. Neubauer et O. Scherzer. Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems, volume 6. de Gruyter, 2008.
- [Kaltenbacher 1997] B. Kaltenbacher. *Some Newton-type methods for the regularization of nonlinear ill-posed problems*. Inverse Problems, vol. 13, no. 3, pages 729–753, 1997.
- [Kato 1995] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [Kirsch & Grinberg 2008] A. Kirsch et N.I. Grinberg. The factorization method for inverse problems, volume 36 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [Kirsch & Monk 1994] A. Kirsch et P. Monk. *An analysis of the coupling of finite-element and Nyström methods in acoustic scattering*. IMA J. Numer. Anal., vol. 14, no. 4, pages 523–544, 1994.
- [Kirsch & Päivärinta 1998] A. Kirsch et L. Päivärinta. *On recovering obstacles inside inhomogeneities*. Math. Methods Appl. Sci., vol. 21, no. 7, pages 619–651, 1998.
- [Kirsch 1996] A. Kirsch. An introduction to the mathematical theory of inverse problems, volume 120 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Kirsch 1998] A. Kirsch. *Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator*. Inverse Problems, vol. 14, no. 6, pages 1489–1512, 1998.
- [Kirsch 1999] A. Kirsch. *Factorization of the far-field operator for the inhomogeneous medium case and an application in inverse scattering theory*. Inverse Problems, vol. 15, pages 413–429, 1999.
- [Kirsch 2000] A. Kirsch. *New characterizations of solutions in inverse scattering theory*. Applicable Analysis, vol. 76, pages 319–350, 2000.
- [Kirsch 2002] A. Kirsch. *The MUSIC algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media*. Inverse Problems, vol. 18, no. 4, pages 1025–1040, 2002.
- [Kirsch 2005] A. Kirsch. *The factorization method for a class of inverse elliptic problems*. Mathematische Nachrichten, vol. 278, no. 3, pages 258–277, 2005.
- [Kunisch & Zou 1998] K. Kunisch et J. Zou. *Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems*. Inverse Problems, vol. 14, no. 5, pages 1247–1264, 1998.
- [Langer 2010] Stefan Langer. *Investigation of preconditioning techniques for the iteratively regularized Gauss-Newton method for exponentially ill-posed problems*. SIAM J. Sci. Comput., vol. 32, no. 5, pages 2543–2559, 2010.
-

- 
- [Lechleiter *et al.* 2008] A. Lechleiter, N. Hyvönen et H. Hakula. *The factorization method applied to the complete electrode model of impedance tomography*. SIAM J. Appl. Math, vol. 68, pages 1097–1121, 2008.
- [Manolis & Shaw 1997] G.D. Manolis et R.P. Shaw. *Fundamental solutions to Helmholtz's equation for inhomogeneous media by a first-order differential equation system*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, vol. 16, no. 2, pages 81–94, 1997.
- [Mikhlin 1970] S. G. Mikhlin. *Mathematical physics, an advanced course*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.
- [Monk & Süli 1999] P. Monk et E. Süli. *The adaptive computation of far-field patterns by a posteriori error estimation of linear functionals*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 36, no. 1, pages 251–274 (electronic), 1999.
- [Moré 1978] Jorge J. Moré. *The Levenberg-Marquardt algorithm : implementation and theory*. In Numerical analysis (Proc. 7th Biennial Conf., Univ. Dundee, Dundee, 1977), pages 105–116. Lecture Notes in Math., Vol. 630. Springer, Berlin, 1978.
- [Morel 2005] Y. Morel. *Décomposition en courants caractéristiques. Application à l'analyse de SER*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2005.
- [Nachman *et al.* 2007] A. I. Nachman, L. Päiväranta et A. Teirilä. *On imaging obstacles inside inhomogeneous media*. J. Funct. Anal., vol. 252, no. 2, pages 490–516, 2007.
- [Osher *et al.* 2006] S. Osher, M. Burger, D. Goldfarb, J. Xu et W. Yin. *An iterative regularization method for total variation-based image restoration*. Multiscale Modeling and Simulation, vol. 4, no. 2, pages 460–489, 2006.
- [Petkov 1989] V. Petkov. *Scattering theory for hyperbolic operators*, volume 21 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
- [Potthast 1998] R. Potthast. *On a concept of uniqueness in inverse scattering for a finite number of incident waves*. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 58, no. 2, pages 666–682, 1998.
- [Potthast 2006] R. Potthast. *A survey on sampling and probe methods for inverse problems*. Inverse Problems, vol. 22, no. 2, pages R1–R47, 2006.
- [Rosen 1960] J.B. Rosen. *The gradient projection method for nonlinear programming. Part I. Linear constraints*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 8, no. 1, pages 181–217, 1960.
- [Schweiger *et al.* 2005] M. Schweiger, S.R. Arridge et I. Nissilä. *Gauss-Newton method for image reconstruction in diffuse optical tomography*. Physics in medicine and biology, vol. 50, page 2365, 2005.
- [Ségui 2000] L. Ségui. *Sur un problème inverse en diffraction d'ondes : identification de permittivités complexes d'un matériau à partir de données du champ proche*. PhD thesis, Université Toulouse III, 2000.
- [Seidman & Vogel 1989] T.I. Seidman et C.R. Vogel. *Well posedness and convergence of some regularisation methods for non-linear ill posed problems*. Inverse Problems, vol. 5, page 227, 1989.
- [Sommerfeld 1912] A. Sommerfeld. *Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung*. J.-Ber. Deutsch Math.-Verein, vol. 21, pages 309–353, 1912.
- [Tikhonov 1995] A.N. Tikhonov. *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*. Springer, 1995.
-



- 
- [Ulbrich 1998] M. Ulbrich. *A Generalized Tikhonov Regularization for Nonlinear Inverse Ill-Posed Problems*. TUM1-M98010, University of Munchen, Munchen, Germany, 1998.
- [Vainikko 2000] G. Vainikko. *Fast solvers of the Lippmann-Schwinger equation*. In P.G. Robert, K. Joji et S.X. Yongzhi, editors, *Direct and Inverse Problems of Mathematical Physics*, volume 5, pages 423–440. Kluwer Academic Publishing, 2000.
- [Venkov 2008] G. Venkov. *Atkinson-Wilcox expansion theorem for inhomogeneous media*. In *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, volume 108, pages 19–25, 2008.
- [Vogel & Oman 1996] C. R. Vogel et M. E. Oman. *Iterative methods for total variation denoising*. *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 17, no. 1, pages 227–238, 1996. Special issue on iterative methods in numerical linear algebra (Breckenridge, CO, 1994).
- [Vogel & Oman 1998] C.R. Vogel et M.E. Oman. *Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images*. *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 7, no. 6, pages 813–824, 1998.
- [Wang & Xiao 2001] Y.F. Wang et T.Y. Xiao. *Fast realization algorithms for determining regularization parameters in linear inverse problems*. *Inverse Problems*, vol. 17, no. 2, pages 281–291, 2001.
- [Wilcox 1975] C.H. Wilcox. *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 442. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [Wirgin 2004] A. Wirgin. *The inverse crime*. Arxiv preprint math-ph/0401050, 2004.
- [Yuan et al. 1990] X. Yuan, D.R. Lynch et J.W. Strohbehn. *Coupling of finite element and moment methods for electromagnetic scattering from inhomogeneous objects*. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 3, pages 386–393, 1990.
-